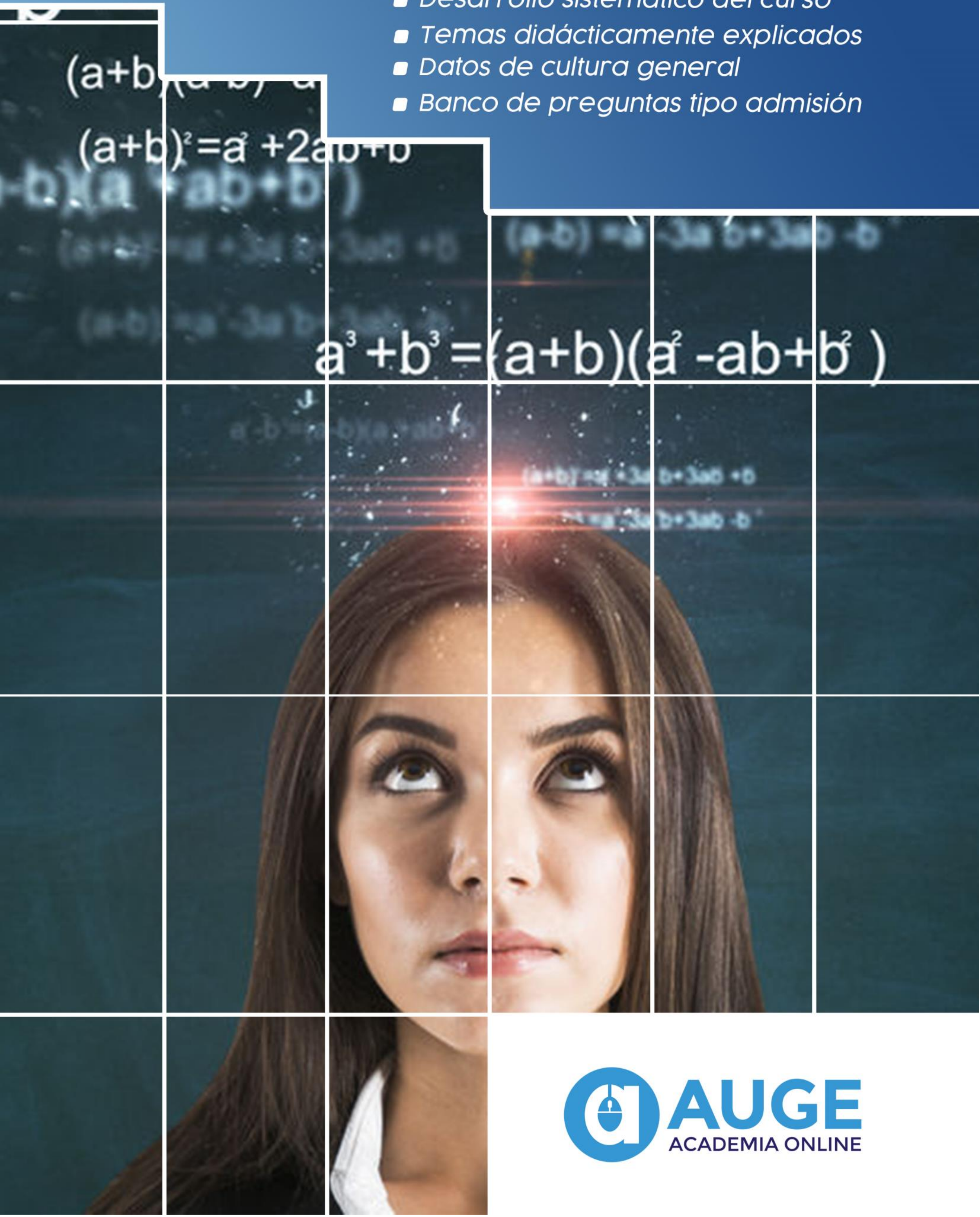
ÁLGEBRA

- Desarrollo sistemático del curso
- Temas didácticamente explicados
- Datos de cultura general
- Banco de preguntas tipo admisión



AUGE
ACADEMIA ONLINE

AXIOMAS DE NÚMEROS REALES
TEORÍA DE EXPONENTES
ECUACIONES

1.1 AXIOMA DE LOS NÚMEROS REALES

El sistema de los números reales es un conjunto no vacío denotado por $\Re$ con dos operaciones internas llamadas:

1) Adición (+) : $\Psi(a,b) = a+b$
2) Multiplicación (.) : $\Psi(a,b) = a.b$

y una relación de orden "<"
(<, se lee "menor que"); el cual satisface los siguientes axiomas.

I. AXIOMAS DE LA ADICIÓN

A_1: Ley de clausura
$\forall\ a, b \in \Re \rightarrow a + b \in \Re$

A_2: Ley conmutativa
$\forall\ a, b \in \Re \rightarrow a + b = b+a$

A_3: Ley Asociativa
$\forall\ a, b, c \in \Re \rightarrow$
$(a + b) + c = a + (b + c)$

A_4: Existencia y unicidad del elemento neutro aditivo
Existe un valor único $\in \Re$, denotado por "0" (0, se lee cero) tal que
$\forall\ a \in \Re$: $a + 0 = a = 0 + a$

A_5: Existencia y unicidad del elemento inverso aditivo
$\forall\ a \in \Re$, existe un valor único denotado por -a tal que:
$\forall\ a \in \Re$:
$a + (-a) = 0 = (-a) + a$

II. AXIOMAS DE LA MULTIPLICACIÓN

M_1: Ley de clausura
$\forall\ a, b \in \Re \rightarrow a.b \in \Re$

M_2: Ley conmutativa
$\forall\ a, b \in \Re \rightarrow a.b = b.a$

M_3: Ley Asociativa: $\forall\ a, b, c \in \Re \rightarrow$
$(a . b) . c = a . (b . c)$

M_4: Existencia y unicidad del elemento neutro multiplicativo
Existe un valor único $\in \Re$, denotado por "1"
(1, se lee uno) tal que
$\forall\ a \in \Re$: $a.1 = a = 1.a$

M_5: Existencia y unicidad del elemento inverso multiplicativo
$\forall\ a \in \Re\ /\ a \neq 0$; existe un valor único denotado por a^{-1} tal que
$a.\ a^{-1} = 1 = a^{-1}.\ a$

III. AXIOMAS DE LEY DISTRIBUTIVA RESPECTO A LA ADICIÓN

$\forall\ a, b, c \in \Re$

D_1: Distributividad por la izquierda
$a\ (b + c) = a\,b + a\,c$

D_2: Distributividad por la derecha
$(a + b)\ c = ac + bc$

IV. AXIOMAS DE ORDEN

O_1 = Ley de Tricotomía
Dados a y b $\in \Re$; se cumple una y solamente una de las siguiente relaciones:

$a < b$	$a = b$	$b < a$

O_2 = Ley Transitiva, $\forall\ a, b, c \in \Re$,
se cumple Si; $a < b \wedge b < c$
$\Rightarrow a < c$

O_3 = Ley de la Monotonía
i) $\forall\ a, b, c \in \Re$;
si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
ii) Si $a < b \wedge 0 < c \Rightarrow ac < bc$
iii) Si $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow bc < ac$

V. AXIOMAS DE LA RELACIÓN DE IGUALDAD DE LOS NÚMEROS REALES

$\forall$ a, b, c $\in \Re$, se cumple

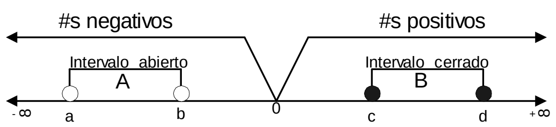
1) Dicotomía: $a = b \vee a \neq b$
2) Reflexividad: $a = a$
3) Simetría: $a = b \rightarrow b = a$
4) Transitividad:
   Si : $a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$
5) Unicidad de la adición
   Si: $a = b \Rightarrow a+c = b+c$
6) Unicidad de la multiplicación
   Si: $a = b \Rightarrow a.c = b.c$

VI. AXIOMAS DEL SUPREMO

Todo conjunto A de números reales (A $\neq$ 0: no vacío) acotado superiormente, tiene una menor cota superior, llamado supremo de A.

1.2 RECTA REAL (INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA)

La recta real es una recta geométrica de infinitos puntos donde cada uno de los puntos establece una correspondencia biunívoca con los números reales, esto nos permite visualizar una relación de orden < (menor que) entre dos o más cantidades, como ilustra la gráfica adjunta.



La relación a < b al graficarla en la recta real nos indica que la cantidad "a" se encuentra a la izquierda de la cantidad "b".

Con respecto a la recta geométrica debemos tener en cuenta lo siguiente:

1. "0" (cero), es el origen de la recta real, no tiene signo.
2. Los números negativos son menores que cero.
3. El cero es menor que cualquier número positivo.
4. El conjunto A denotado por
   $A = \{ x / a < x < b \}$
   Se denomina "intervalo abierto" sobre el eje real y tiene dos representaciones matemáticas
   $X \in < a; b >$ ó $x \in] a ; b [$
   Se lee: " x pertenece al intervalo abierto "a" coma "b"
5. El conjunto B, denotado por
   $B = \{ x / c \leq x \leq d \}$
   Donde los extremos c y d están incluidos, se llama "intervalo cerrado" sobre el eje real y se lee: "x pertenece al intervalo cerrado "c" coma "d" ", se denota como:
   $x \in [a ; d]$
6. El valor absoluto de un número real "a" denotado por |a| satisface la siguiente regla de correspondencia.
   $$|a| = \begin{cases} a \ ; \ si \ a \geq 0 \\ -a \ ; \ si \ a < 0 \end{cases}$$
7. La distancia entre dos puntos "a" y "b" sobre el eje real es:
   $|a - b|$

1.3 TEOREMAS IMPORTANTES EN RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

1. Ecuación de primer grado en una variable
   $\forall$ a, b, x $\in \Re$;
   con $a \neq 0$. Si $ax + b = 0$, entonces se cumple que: $\boxed{x - \frac{b}{a}}$
2. Ecuación de segundo grado en una variable
   $\forall$ a, b, c, x $\in \Re$;
   con $a \neq 0$ / $ax^2 + bx + c = 0$
   se cumple que:
   $$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$
   o también: $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$

al símbolo $\Delta = b^2 - 4\,ac$, se llama discriminante de la ecuación de segundo grado.

3. Ecuaciones simultáneas lineales con dos incógnitas
$\forall\ a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \Re$
con; $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$, donde:

$$\begin{cases} a_1\, x + b_1\, y = c_1 ....(\alpha) \\ a_2\, x + b_2\, y = c_2 ....(\beta) \end{cases}$$

se cumple que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1\ b_2 - c_2\ b_1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1\ c_2 - a_2\ c_1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}$$

4. $\forall\ a, b \in \Re$ / $a.b=0 \rightarrow a = 0 \vee b=0$

1.4 OPERACIONES BÁSICAS EN EL CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES

Adición.- Es la operación matemática, que por medio del signo (+) dos o más cantidades llamadas sumandos se reducen en una sola, denominada suma. La suma de dos números reales está sujeta a las siguientes reglas.

Regla 1.- La suma de dos números reales con el mismo signo está determinada por la suma de sus valores absolutos y el resultado o suma total está afectado por el signo de los sumandos.
Ejemplo:
a) −3−4 = -7 c) 12 + 30 = 42
b) 5+6 = 11 d) − 12 - 30 = - 42

Regla 2.- La suma de dos números reales de signos diferentes está determinada por la diferencia de sus valores absolutos (El mayor menos el menor) y el resultado o suma total se encuentra afectado por el signo del sumando que tenga mayor valor absoluto.

Ejemplo:
a) − 10 + 5 = - 5 d) − 3 + 8 = 5
b) − 12 + 2 = - 10 e) 17 − 20 = - 3
c) 12 - 3 = 9 f) − 14 + 6= - 8

NOTA.- En la adición de varias cantidades reales con diferentes signos, se agrupan las cantidades positivas y negativas entre sí y luego se procede a la reducción de acuerdo a las reglas dadas.

Ejemplo:
a) −6+5-4-3+2-9=(-6-4-3-9)+5+2)
= -22+7
= -15
b) −12+3-9-5+4 = (-12-9-5)+(3+4)
= -26+7
= -19

SUSTRACCIÓN.- Es la operación matemática que por medio del signo menos (-) obtenemos la diferencia de dos números (minuendo menos sustraendo)

Ejemplo:
a) Restar −12 de 5:

$$\begin{cases} \text{minuendo}: 5 \\ \text{sustraendo}: -12 \\ \text{diferencia}: 5-(-12) = 17 \end{cases}$$

b) Restar 8 de −8:

$$\begin{cases} \text{minuendo}: -8 \\ \text{sustraendo}: 8 \\ \text{diferencia}: -8-(8) = -16 \end{cases}$$

MULTIPLICACIÓN.- Es una adición abreviada, cuya operación matemática por medio del signo por (.) ó (x) nos permite obtener el producto de las cantidades llamadas multiplicando y multiplicador. Esta operación está sujeta a dos reglas respecto a los signos.

Regla 1.- La multiplicación de dos cantidades no nulas del mismo signo es una cantidad positiva Ejm.
a) (- 3) (- 4)=12
b) (12) (3) = 36
c) (- 8) (- 2) = 16

Regla 2.- la multiplicación de dos cantidades no nulas de signos diferentes es una cantidad negativa
Ejemplo:
a) (- 3) (4)= -12
b) (12) (-3) = -36
Respecto a la ley de signos, vemos que:
i) Multiplicación de signos iguales es positivo: (+) (+)=+ $\wedge$ (-)(-) = +
ii) Multiplicación de signos diferentes es negativo: (-) (+) = - $\wedge$(+)(-) = -

DIVISIÓN.- Es la operación matemática que consiste en determinar cuantas veces un número está contenido en otro por medio del signo operacional entre (÷), al resultado obtenido se le llama cociente. El número que se divide se llama dividendo y el que divide se llama divisor. Esta operación está sujeta a dos reglas respecto a los signos.

Regla 1.- La división de dos cantidades no nulas del mismo signo es una cantidad positiva (mayor que cero)

Ejemplo:

a) $\frac{-16}{-2}=8$ c) $\frac{-18}{-9}=2$

b) $\frac{8}{2}=4$ d) $\frac{-24}{-8}=3$

Regla 2.- La división de dos cantidades no nulas de signo diferente es una cantidad negativa (menor que cero).

Ejemplo:

a) $\frac{12}{-3}=-4$ c) $\frac{-15}{5}=-3$

b) $\frac{-18}{2}=-9$ d) $\frac{27}{-3}=-9$

Respecto a ley de los signos, en la división de dos cantidades reales no nulas, se observa que:
i) División de signos iguales, es positivo: $\frac{+}{+}=+ \quad \wedge \quad \frac{-}{-}=+$
ii) División de signos diferentes, es negativo: $\frac{+}{-}=- \quad \wedge \quad \frac{-}{+}=-$

1.5 OBSERVACIONES FUNDAMENTALES EN LAS OPERACIONES CON FRACCIONES

1) Adición de fracciones homogéneas
$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}\pm\frac{d}{b}\pm\frac{e}{b}=\frac{a\pm c\pm d\pm e}{b}$$

2) Adición de fracciones heterogéneas
$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}\pm\frac{e}{f}=\frac{adf\pm cbf\pm ebd}{bdf}$$

3) Multiplicación de fracciones.- Se multiplican los numeradores y denominadores entre sí:
$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{aceg}{bdfh}$$

4) División de fracciones.- Se invierte la segunda fracción y se multiplican los numeradores y denominadores entre sí:
$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

5) Fracción de fracción.- Se obtiene una fracción equivalente cuyo numerador es el producto de los extremos y el denominador es el producto de los medios.
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}\rightarrow\begin{cases} b \wedge c \text{ (medios)} \\ a \wedge d \text{ (extremos)} \end{cases}$$

6) Posición relativa de un signo en una fracción

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{-a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

POTENCIACIÓN.- Es la multiplicación repetida de una cantidad en un número finito de veces; el resultado final se le llama potencia. Está sujeta a las siguientes reglas respecto a las cantidades negativas.

Regla 1.- Toda cantidad negativa afectada por un exponente par (bajo un paréntesis) es positivo

Ejemplo:
a) $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$
b) $(-7)^2 = (-7)(-7) = 49$
c) $(-8)^2 = (-8)(-8) = 64$
d) $(-3)^6 = 729$

Regla 2.- Toda Cantidad negativa afectada por un exponente impar bajo un paréntesis o sin paréntesis siempre es negativo.

Ejemplo:
a) $(-6)^3 = (-6)(-6)(-6) = -216$
b) $-6^3 = -(6)(6)(6) = -216$
c) $(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$
d) $-4^3 = -(4)(4)(4) = -64$

En resumen, respecto a los signos en potenciación debemos considerar
a) $(-)^{PAR} = +$
b) $(-)^{IMPAR} = -$

RADICACIÓN.- Es la operación inversa a la potenciación que nos permite encontrar un número llamado raíz, tal que elevado al índice del radical reproduce el radicando o cantidad subradical.

$$\sqrt[n]{a} = r \Leftrightarrow r^n = a$$

Ejemplo:
a) $\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \leftrightarrow \quad (-2)^3 = -8$
b) $\sqrt{16} = -4 \quad \leftrightarrow \quad (-4)^2 = 16$
c) $\sqrt{16} = 4 \quad \leftrightarrow \quad (4)^2 = 16$
d) $\sqrt[3]{8} = 2 \quad \leftrightarrow \quad (2)^3 = 8$

Respecto a los números reales podemos hacer la siguiente clasificación:

$\Re$ (#s reales)
- $\Re^+$ (Reales positivos)
  - Racionales (Q^+)
    - Enteros (Z^+)
    - Fraccionarios (F^+)
  - Irracionales (I^+)
- 0 (cero real)
- $\Re^-$ (Reales negativos)
  - Racionales (Q^-)
    - Enteros (Z^-)
    - Fraccionarios (F^-)
  - Irracionales (I^-)

1.6 PRINCIPALES CONJUNTOS NUMÉRICOS

A.- El conjunto de los Números naturales, denotado por N, donde:
$N = \{1, 2, 3, \ldots\ldots..\}$

B.- El conjunto de los **Números enteros**, denotado por Z, donde:
$\mathbf{Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}}$

C.- El conjunto de los **Números racionales**, denotado por Q, donde:

$$\mathbf{Q = \{x/x = \frac{p}{q}, \text{ p y q son enteros}\}}$$
$(q \neq 0)$

D.- El conjunto de los **Números irracionales,** denotado por I, donde:
I = {x/x tiene representación decimal infinita no periódica}

E.- El conjunto de los **Números Reales,** denotados por $\Re$, donde:

$\Re = \{x/x \text{ es racional ó irracional}\}$

F.- El conjunto de los **Números Complejos,** denotado por C, donde:

$C = \{ x \,/\, x = a + b\,i \,;\, a \wedge b \in \Re \}$

i es la unidad imaginaria donde:

$i = \sqrt{-1}$; tal que: $i^2 = -1$

G.- El conjunto de los **Números enteros positivos** denotados por Z^+, donde:

$Z^+ = \{ 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots \}$

H.- El conjunto de los **Números Enteros positivos incluido el cero**, denotado por

$Z_0^+ = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\ldots \}$

Asimismo ampliando se tendrían los siguientes conjuntos:

$Q^+, \Re^+, Q^-, \Re^-, \Re_0^+, \Re_0^-, Q_0^-$, etc.

1.7 TEORIA DE EXPONENTES

Es un conjunto de fórmulas que relaciona a los exponentes de las expresiones algebraicas de un solo término, cuando entre estas expresiones algebraicas se realizan operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación en un número limitado de veces. Sus principales leyes sobre el campo de los números reales son:

I. MULTIPLICACIÓN DE BASES IGUALES

$\boxed{a^m . a^n = a^{m+n}}$; $m, n \in \Re$

II. MULTIPLICACIÓN DE BASES DIFERENTES CON IGUAL EXPONENTE

$\boxed{a^m . b^m = (a.b)^m}$; $m \in \Re$

III. DIVISIÓN DE BASES IGUALES

$\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ $a \neq 0 \wedge m \in \Re$

IV. DIVISIÓN DE BASES DIFERENTES CON IGUAL EXPONENTE

$\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ $b \neq 0 \wedge m \in \Re$

V. POTENCIA DE POTENCIA

$\boxed{(a^m)^n = a^{m.n}}$; $m, n \in \Re$

NOTA: $a^{m^n} \neq a^{m.n}$ ó $a^{m^n} \neq (a^m)^n$

VI. EXPONENTE NEGATIVO

$\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m;}$ $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

NOTA: $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

VII. EXPONENTE CERO ($a \neq 0$)

$\boxed{a^0 = 1}$

NOTA.- 0^0 es indeterminado

VIII. RAIZ DE UNA POTENCIA

$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};}$ $m, n \in \Re / n \neq 0$

i) $\sqrt[n]{a^m \; b^p \; c^q} = a^{\frac{m}{n}} \; b^{\frac{p}{n}} \; c^{\frac{q}{n}}$

ii) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

IX. MULTIPLICACIÓN DE RADICALES HOMOGENEOS

$\boxed{\sqrt[n]{a} \; \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$; $n \in \Re / n \neq 0$

X. DIVISIÓN DE RADICALES HOMOGENEOS

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}} \qquad n \in \Re /\ n \neq 0$$

XI. POTENCIACIÓN DE UN RADICAL

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}\ ;$$

$m, n, p, \in \Re / n \neq 0$

XII. RADICAL DE RADICAL

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}\ ; \quad m, n, p, \in \Re$$

XIII. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS RADICALES

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mk]{(a^n)^K}\ ;$$

$m, n, k, \in \Re / mk \neq 0$

1.8 EJERCICIOS

EJERC.1. Simplificar:

$$E = \frac{(a^{12})^2\ (a^3)^{-6}}{(a^{-2})^4}$$

Solución:

Como, $\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$

$$\rightarrow \quad E = \frac{a^{24}.\ a^{-18}}{a^{-8}}$$

De las fórmulas (I) y (II):

$E = a^{24-18-(-8)}$; con lo cual

$\boxed{E = a^{14}}$ (Rpta).

EJERC. 2: Efectuar:

$$S = \frac{\left((a^3b^2)^2\ \ ab^3\right)^3}{\left((ab^2)^3\ \ ab\right)^2}$$

Solución:

Teniendo en cuenta la fórmula

$$\boxed{(((a^m)^n\ a^p)^q\ a^r)^s = a^{((mn+p)q+r)s}}$$

obtenemos:

$$S = \frac{a^{(3x2+1)3}\quad b^{(2x2+3)3}}{a^{(1x3+1)2}\quad b^{(2x3+1)2}} = \frac{a^{21}\quad b^{21}}{a^{8}\quad b^{14}}$$

$S = a^{21-8}\ b^{21-14} \rightarrow \boxed{S = a^{13}\ b^7}$ (Rpta.)

EJERC. 3.- Dar el valor simplificado de

$$E = \sqrt[3]{x^{16}\ \sqrt[3]{x^{16} \ldots\ldots \text{radicales}}}$$

Solución:

Escribiendo un radical más, se tendría

$$E = \underbrace{\sqrt[3]{x^{16}\ \sqrt[3]{x^{16} \ldots\ldots \text{radicales}}}}_{E}$$

$$E = \sqrt[3]{x^{16}\ E}$$

Elevando el cubo, los dos miembros de la igualdad:

$$E^3 = \left(\sqrt[3]{x^{16}\ E}\right)^3 \rightarrow E^3 = x^{16}\ E$$

Simplificando

$$\frac{E^3}{E} = x^{16} \rightarrow E^2 = x^{16}\ \therefore\ E = x^8 \text{ (Rpta)}$$

EJERC. 4.- Simplificar la expresión

$$K = \sqrt[b^2-1]{\sqrt[b^3]{\left(\sqrt[b^2+1]{a^{b^3-b}}\right)^{b^4+b^2}}}$$

Solución:

Transformando a un solo radical y a un solo exponente:

$$K = \sqrt[(b^2-1)b^3(b^2+1)]{a^{(b^3-b)(b^4+b^2)}}$$

expresando convenientemente

$$K = \sqrt[(b^2-1)b^3(b^2+1)]{a^{b(b^2-1)b^2(b^2+1)}}$$

siendo el exponente igual al índice del radical $\boxed{K = a}$ (Rpta)

1.9 ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER GRADO EN LOS REALES

La ecuación lineal de primer grado en una variable es aquella que adopta la forma canónica:
$\forall$ a, b $\in \Re$:

$$\boxed{ax + b = 0 \quad / \quad a \neq 0}$$

y cuya solución es: $x = -\dfrac{b}{a}$

DISCUSIÓN:
Respecto a la solución de la ecuación, se debe tener en cuenta lo siguiente:

1º La ecuación es compatible determinada, (finitas soluciones)
Si: $a \neq 0 \wedge b \in \Re$

2º La ecuación es compatible indeterminada, (infinitas soluciones)
Si: $a = 0 \wedge b = 0$

3º La ecuación es incompatible, inconsistente (ecuación absurda)
Si: $a = 0 \wedge b \in \Re / b \neq 0$

1.10 EJERCICIOS

01. Resolver: $\dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{x+1}{x-4}$

Solución:
Aplicando las siguientes identidades

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \rightarrow ad = bc$
2. (a+b) (c+d) = ac+ad+bc+bd

obtenemos:
$(x+3)(x-4) = (x-2)(x+1)$
$x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 + x - 2x - 2$
Simplificando:
$-x - 12 = -x - 2$
$0x = 10$

Como el coeficiente de #x" es cero la ecuación es:

Ecuación Incompatible (Rpta)

02. Que valor de "x" satisface a la ecuación:

$$\frac{3x-2}{4} - \frac{5x-1}{3} = \frac{2x-7}{6}$$

Solución:
Siendo el m.c.m. (4, 3, 6) = 12, se obtiene:

$3(3x-2) - 4(5x-1) = 2(2x-7)$
$9x - 6 - 20x + 4 = 4x - 14$

Simplificando:
$-11x-2 = 4x-14$
$-15x = -12$

de donde: $x = \dfrac{12}{15} \rightarrow x = \dfrac{4}{5}$ (Rpta)

03. Resolver la ecuación literal

$$\frac{\dfrac{x-a}{b} - \dfrac{x-b}{a}}{\dfrac{x-2a}{a} - \dfrac{x-2b}{b}} = -\frac{a}{b}$$

Solución:

En las fracciones, siendo el mcm (b, a, a, b) = ab; se tendría

$$\frac{a(x-a) - b(x-b)}{b(x-2a) - a(x-2b)} = -\frac{a}{b}$$

operando y reduciendo:

$$\frac{ax - a^2 - bx + a^2}{bx - 2ab - ax + 2ab} = -\frac{a}{b}$$

obtenemos

$$\frac{(a-b)x - (a^2 - b^2)}{-(a-b)x} = \frac{-a}{b}$$

$$\frac{(a-b)x - (a+b)(a-b)}{-(a-b)x} = -\frac{a}{b}$$

Cancelando: (a-b)

$$\frac{x-(a+b)}{-x} = \frac{-a}{b} \rightarrow bx - (a+b)b = ax$$

$(b-a)x=ab+b^2 \therefore x = \dfrac{ab+b^2}{b-a}$ (Rpta)

04. Qué valor de "x" satisface a la ecuación:

$$5+\cfrac{2}{3+\cfrac{-4}{1+\cfrac{x-1}{x-3}}} = 5+\cfrac{2}{3-\cfrac{4}{1-\cfrac{x-2}{5-x}}}$$

<u>Solución</u>:
Debe tenerse en cuenta que los términos que son iguales en los dos miembros de la ecuación se pueden cancelar directamente; es decir: 5 con 5; 2 con 2; 3 con 3; -4 con –4 y 1 con 1; quedando:

$$\frac{x-1}{x-3} = -\frac{x-2}{5-x}$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{x-1}{x-3} = \frac{x-2}{x-5}$$

Por proporciones

$$X^2\ 5x-x+5=x^2-2x-3x+6$$

Simplificando:

$-x+5=6 \ \rightarrow x = -1$ (Rpta)

05. Resolver:

$$\frac{\sqrt{5x+a}+\sqrt{5x-a}}{\sqrt{5x+a}-\sqrt{5x-a}} = \frac{3}{2}$$

<u>Solución</u>:
Haciendo el cambio de variable:

$$\begin{cases} \sqrt{5x+a} = m \\ \sqrt{5x-a} = n \end{cases}$$

la ecuación se transforma en:

$$\frac{m+n}{m-n} = \frac{3}{2} \rightarrow 2m+2n = 3m-3n$$

$$5n \ = m$$

volviendo a la variable original

$$5\sqrt{5x-a} = \sqrt{5x+a}$$

elevando al cuadrado; se obtiene

$$25(5x-a) = 5x+a$$
$$125x-25a = 5x+a$$
$$120\,x = 26a$$

de donde: $x=\dfrac{13a}{60}$ (Rpta)

06. Calcular "x" en la ecuación:

$$\frac{x^2-14x+50}{x^2+6x+10} = \left(\frac{x+3}{x-7}\right)^{-2}$$

<u>Solución</u>:
Transformando el exponente negativo en positivo y desarrollando el cuadrado del binomio obtenemos:

$$\frac{x^2-14x+50}{x^2+6x+10} = \frac{x^2-14x+49}{x^2+6x+9}$$

haciendo el cambio de variable
$x^2-14x+49 = a \quad \wedge \quad x^2+6x+9=b$
tendríamos:

$$\frac{a+1}{b+1} = \frac{a}{b} \rightarrow \ ab+b=ab+a$$

de donde: $b = a$

ó: $x^2+6x+9 = x^2-14x+49$

$20x=40$

$\therefore X = 2$ (Rpta)

1.11 ECUACIONES EXPONENCIALES

Son todas aquellas ecuaciones que se caracterizan por que la incógnita se encuentra en el exponente.

Ejemplo:

a) $27^{-x+3} = 9^{x-1}$

b) $2^{x+2} - 2^{x-3} + 2^{x-1} = 35$

c) $\sqrt[x-2]{5^{x+3}} = \sqrt[x+3]{5^{x-6}}$

d) $3^{9^{x-1}} = 27^{3^{-x+1}}$

Los criterios de solución respecto a la solución de ecuaciones exponenciales son:

1º A bases iguales, los exponentes deben ser iguales, es decir

$\boxed{a^m = a^n \ \Leftrightarrow m = n}$; $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 1$

2º En toda ecuación exponencial si las estructuras algebraicas en ambos miembros son iguales, entonces el valor de la incógnitas se obtiene por comparación.

Ejemplo:

a) Si: $x^{x^{x+2}} = 5^{5^{5+2}} \Rightarrow x = 5$

b) $\sqrt[3-x]{x^{x-4}} = \sqrt[3-6]{6^{6-4}} \Rightarrow x = 6$

En este tipo de ecuaciones exponenciales, el problema consiste en hacer transformaciones en uno de sus miembros (ó en ambos) de forma que se halle una equivalencia estructural; el valor de la incógnita se obtiene por comparación.

1.12 **EJERCICIOS**

01. Calcular "x", sí:

$$27^{-x-2} = 9^{x+1}$$

Solución:

Expresando en base "3"; tendríamos

$$(3^3)^{-x-2} = (3^2)^{x+1}$$

$$3^{-3x-6} = 3^{2x+2}$$

igualando los exponentes

$$-3x-6 = 2x+2$$

$$-5x = 8$$

$$\therefore x = -\frac{8}{5} \quad \text{(Rpta)}$$

02. Hallar el valor de "x" en la ecuación

$$\sqrt[x-1]{7^{x+2}} = \sqrt[x-3]{7^{x-2}}$$

Solución:

Transformando los radicales en exponentes fraccionarios, se obtiene:

$$7^{\frac{x+2}{x-1}} = 7^{\frac{x-2}{x-3}}$$

igualando los exponentes:

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{x-2}{x-3}$$

$\rightarrow$ (x+2)(x-3) = (x-1)(x-2)

operando:

$$x^2-x-6=x^2-3x+2$$

$$2x=3$$

$$\therefore x = 4 \quad \text{(Rpta).}$$

04. Resolver:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}\left(\frac{9}{4}\right)^{3x-1} = \left(\frac{8}{27}\right)^{-5x+2}$$

Solución:

Expresando en la base $\left(\frac{2}{3}\right)$; se tendría

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{3x-1} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right)^{-5x+2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-6x+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-15x+6}$$

Igualando los exponentes:

$$-5x = -15x+6$$

$$10x = 6$$

$$\therefore x = \frac{3}{5} \quad \text{(Rpta)}$$

05. Que valor de "x" resuelve la ecuación:

$$125^{9^{-a+4}} = 5^{27^{2x-3}}$$

Solución:

Expresando en base "5"

$$\left(5^3\right)^{9^{-x+4}} = 5^{27^{2x-3}}$$

$$5^{3.9^{-x+4}} = 5^{27^{2x-3}}$$

Igualando los exponentes

$$3.9^{-x+4}=27^{2x-3}$$

Colocando en base "3"

$$3.(3^2)^{-X+4} = (3^3)^{2X-3}$$

$$3.3^{-2x+8} = 3^{6x-9}$$

$$3^{-2x+9}=3^{6x-9}$$

Igualando los exponentes; obtenemos:

$$-2x+9=6x-9$$

$$-8x=-18$$

$$\therefore x = \frac{9}{4} \quad \text{(Rpta)}$$

MONOMIOS, POLINOMIOS, GRADOS NOTACIÓN DE POLINOMIOS

2.1 MONOMIOS – POLINOMIOS - GRADOS

INTRODUCCIÓN.- La unidad fundamental de la estructura algebraica es el "término algebraico"

TÉRMINO ALGEBRAICO.- Es el conjunto de letras y números ligados por las operaciones matemáticas de multiplicación, división, potenciación y radicación en un número limitado de veces.

Ejemplos:

a) $2x^3\ y^2$

b) $\sqrt{x}\ \ y^3$

c) $-\dfrac{x}{y}$

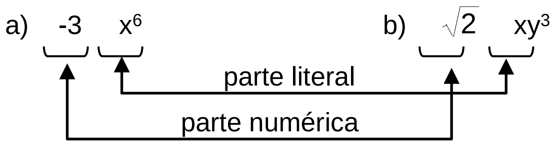
d) $\dfrac{3}{4}\ x\ y^2\ \ z^{1/3}$

e) $-6\ ab^2\ x\ y\ z^6$

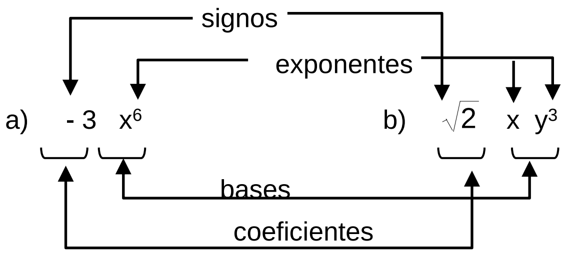
f) $-x$

2.2 ELEMENTOS DE UN TÉRMINO ALGEBRAICO

Globalmente está constituido por una parte numérica y una parte literal, como se muestra a continuación:

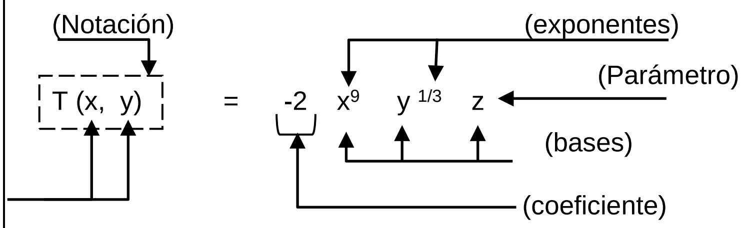


En cada una de estas partes se especifican:



Es muy importante presentar a los términos algebraicos bajo una notación de forma que nos permita diferenciar las constantes de las variables.

Ejemplo: Para el término algebraico de notación T (x , y) se observa que:



Debemos tener en cuenta:

a) **T (x,y).-** Es la notación que nos indica que las únicas variables son las letras "x" e "y".

b) **Signo.-** Indica si el término es mayor o menor que cero.

c) **Coeficiente.-** Es la cantidad que afecta a la parte literal; en el caso de que el coeficiente sea un número entero y positivo, nos indica el número de veces que se repite la parte literal como sumando.

Ejemplo:

a) $+\ 6\ x^2 = \underbrace{x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2}_{(6\text{ veces})}$

b) $3x\ y\ z = \underbrace{x\ y\ z + x\ y\ z + x\ y\ z}_{(3\text{ veces})}$

COEFICIENTE NATURAL

Con respecto a la siguiente secuencia:

$1\,a = \underbrace{a}$ (a se suma 1 vez)

$2\,a = a + a$ (a se suma 2 veces)

$3\,a = a + a + a$ (a se suma 3 veces)

⋮

$na = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n\text{ veces}}$ (a se suma n veces)

De la propiedad de simetría

$$\boxed{\underbrace{a+a+a+....+a}_{n\ veces} = na} \quad n \in z^+$$

Ejemplos

a) $\underbrace{a+a+a+....+a}_{80\ veces} = 80\,a$

b) $\underbrace{x\,y^2 + x\,y^2 + ...+ x\,y^2}_{33\ veces} = 33\,x\,y^2$

c) $\underbrace{2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+.........+2\sqrt{x}}_{100\ veces} = 200\sqrt{x}$

d) $\underbrace{(x+y^2)+(x+y^2)+.....+(x+y^2)}_{72\ veces} = 72\ (x+y^2)$

d) Exponente.- Es el número que se escribe en la parte superior derecha de una "base"; si el exponente es un número entero y positivo nos indica el número de veces que se está multiplicando la base

Ejemplos:

a) $x^5 = \underbrace{x \bullet x \bullet x \bullet x \bullet x}_{5\ veces}$

b) $(x^3)^4 = \underbrace{x^3 \bullet x^3 \bullet x^3 \bullet x^3}_{4\ veces}$

EXPONENTE NATURAL

Con referencia a la siguiente secuencia:

$a^1 = a$ (a se multiplica 1 vez)

$a^2 = \underbrace{a \bullet a}_{2\ veces}$ (a se multiplica 2 veces)

$a^3 = \underbrace{a \bullet a \bullet a}_{3\ veces}$ (a se multiplica 3 veces)

⋮

$a^n = \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet .... \bullet a}_{n\ veces}$ (a se multiplica n veces)

Por la propiedad de simetría:

$$\boxed{\underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet ...... \bullet a}_{n\ veces} = a^n} \quad n \in Z^+$$

Ejemplos:

a) $\underbrace{x \bullet x \bullet x\ ....\ x}_{60\ veces} = x^{60}$

b) $\underbrace{6 \bullet 6 \bullet 6\ ....6}_{n^2\ veces} = 6^{n^2}$

c) $\underbrace{(x-y^2)\ (x-y^2)\ ....\ (x-y^2)}_{29\ veces} = (x-y^2)^{29}$

d) $\underbrace{z \bullet z \bullet z\ ,,,,,,,,,,z}_{(n-2)\ veces} = z^{n-2}$

2.3 MONOMIO.-

Es la expresión algebraica racional entera que consta de un solo término, en el cual los exponentes de sus variables son cantidades enteras no negativas. Ejm:

a) $M\ (x, y) = -2\ x^7\ y^3$

b) $R\ (x, y) = -6\ x^9\ y^5\ z^6$

GRADOS DE UN MONOMIO.-

a) Grado absoluto (G.A.).- Está determinado por la suma de los exponentes de sus variables.

Ejemplo:

Respecto a los monomios

a) $M(x,y) = -\ 9\ x^4\,y^6 \rightarrow$ G.A. = 4 + 6 = 10

b) $R(x,y) = -\ 6\ x^4\,y^6\ z^3 \rightarrow$ G.A. = 4 + 6 = 10

b) Grado Relativo (G.R.).- Con respecto a una de sus variables, es el exponente que tiene dicha variable, es decir:

Respecto al monomio:

$M\ (x, y) = -\ 5\ \ x^6\ y^4\ \ z^8$

Vemos que:

$$\begin{cases} G.R.\ (x) = 6 \\ G.R.\ (y) = 4 \\ G.R.\ (z) = 8 \end{cases}$$

EJERCICIOS

Ejercicio 1.- Dado el monomio

$M\ (x, y) = (((x^3\ y^2)^3\ \ x^2\ y)^2\ x\ y^2)^2$

Hallar su grado absoluto

Solución

Simplificando, obtenemos:

M (x, y) = $x^{((3x\,3\,+\,2)\,2\,+\,1)\,2}\ y^{32}$

M (x, y) = $x^{46}\ y^{32}$, de donde

G.A. = 46 + 32 = 78 Rpta.

Ejercicio 2.- Hallar el valor de "n" en el monomio

$$M(x) = \frac{\sqrt[3]{x^{n-2}}\ \sqrt{x^{n-3}}}{\sqrt[6]{x^{n-1}}}$$

Sabiendo que es de primer grado.

Solución

Reduciendo a una sola base y a un solo exponente:

$$M(x) = \frac{x^{\frac{n-2}{3}} \bullet x^{\frac{n-3}{2}}}{x^{\frac{n-1}{6}}}$$

$$M(x) = x^{\frac{n-2}{3} + \frac{n-3}{2} - \frac{n-1}{6}}$$

Siendo M (x) de primer grado, se cumple que:

$$\frac{n-2}{3} + \frac{n-3}{2} - \frac{n-1}{6} = 1; \quad mcm = 6$$

Resolviendo

2 (n – 2) + 3(n-3) – 1 (n-1) = 6(1)

2 n – 4 + 3 n – 9 – n + 1 = 6

4 n = 18

Obtenemos: n = $\frac{9}{2}$ Rpta.

Ejercicio 3.- Dado el monomio:

$$M(x) = \sqrt[4]{\frac{x^{2n-3}\ \sqrt[3]{x^{2n-1}}}{\sqrt{x^{2n-5}}}}$$

Para que el valor de "n"; M(x) es constante.

Solución

Dado que: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ **; se tendría :**

$$M(x) = \frac{X^{\frac{2n-3}{4}} \bullet X^{\frac{2n-1}{12}}}{X^{\frac{2n-5}{8}}}$$

Reduciendo a una sola base:

$$M(x) = X^{\frac{2n-3}{4} + \frac{2n-1}{12} - \frac{2n-5}{8}}$$

Como M(x), es una cantidad constante se cumple que:

$$\frac{2n-3}{4} + \frac{2n-1}{12} - \frac{2n-5}{8} = 0 \ ; \quad mcm = 24$$

Con lo cual:

6(2n – 3) + 2 (2n – 1) - 3 (2n – 5) = 0

12n –18 + 4 - 2 - 6n + 15 = 0

10 n = 5

De donde:

n = 0,5 Rpta.

Ejercicio 4.- En el monomio:

M(x,y)= $x^{3(2a+3b)}\ y^{4(5a-2b)}$

Se cumple que:

G.A. = 83 y G.R (Y) = 20

Determine : (a + b)

Solución

Dado que:

$$G.A. = 83 \longrightarrow \begin{cases} G.R.(y) = 20 \\ y \\ G.R.(x) = 63 \end{cases}$$

Lo cual a su vez implica que:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 21 \quad .... \quad (1) \\ 5a - 2b = 5 \quad .... \quad (2) \end{cases}$$

Resolviendo por determinantes:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-42-15}{-4-15} = 3$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 21 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{10-105}{-4-15} = 5$$

$\therefore$ a + b = 8 Rpta

2.4 POLINOMIO

Es la expresión algebraica que consta de dos o más términos, en el cual los exponentes de sus variables son números enteros no negativos. Son ejemplos de polinomios:

a) $P(x) = 2x - 3$ (binomio)
b) $Q(x) = x^3 + x^2 y + y^2$ (trinomio)
c) $P(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ (trinomio)

GRADOS DE UN POLINOMIO.-

a) Grado absoluto (G.A.).- Está determinado por el mayor grado absoluto que tiene uno de sus términos.
Ejemplo:
Dado el polinomio:

$$P(x,y) = \underbrace{x^6 y^4}_{10^o} - 2\underbrace{x^7 y^8}_{13^o} + \underbrace{x^6 y^{16}}_{22^o}$$

vemos que: G.A. =22

b) Grado Relativo (G.R.).- Con respecto a una de sus variables es el mayor exponente que tiene dicha variable en el polinomio dado.
Ejemplo:
Dado el polinomio:
$P(x,y) = x^6 y^3 - 2x^9 y^7 - x^4 y^8$

Vemos que: $\begin{cases} G.R.(x) = 9 \\ G.R.(y) = 8 \end{cases}$

EJERCICIOS

01.- Dado el polinomio
$P(x, y) = 5x^{n-4} y^{n-3} + x^{n-6} y^{n-2}$
Hallar "n" si su grado absoluto es 9

Solución
Sumando los exponentes de cada término, obtenemos:

$$P(x, y) = 5\underbrace{x^{n-4} y^{n-3}}_{(2n-7)} + \underbrace{x^{n-6} y^{n-2}}_{(2n-8)}$$

Por consiguiente: $2n - 7 = 9$
$n = 8$ Rpta.

02.- Si los términos del polinomio
$P(x, y, z) = x^{m+n} + y^{3n} + z^{m+2}$
Tienen el mismo grado. Hallar m^n

Solución
Para este caso, se cumple que:
$m + n = 3n = m + 2$
con lo cual:
de : $m + n = m + 2 \rightarrow n = 2$
de : $m + n = 3n$
$m + 2 = 6 \rightarrow m = 4$
$\therefore m^n = 4^2 = 16$ Rpta.

2.5 CLASIFICACIÓN DE LOS POLINOMIOS

Polinomio Ordenado: Un polinomio está ordenado con respecto a una letra llamada ordenatriz, si sus exponentes aumentan (ascendentes); ó disminuyen (descendentes).

Ejemplo:
a) $P(x) = 7 - x^3 + 2x^6 - x^{15}$ (ascendente)
b) $P(x) = x^9 - 2x^7 - x^3 - 1$ (descendente)

Polinomio Completo: Un polinomio es completo con respecto a una letra llamada ordenatriz si sus potencias aumentan o disminuyen desde el mayor exponente hasta el exponente cero en forma consecutiva

a) $P(x) = 2x^4 + x^3 + 6x^2 - 7x - 6$ (D)
b) $P(x) = -5 + 2x - 3x^2 + x^3$ (A)
c) $P(x,y) = 3x^2 - 5xy + 3y^2$ (D) y (A)
Descendente respecto a "x"
Ascendente respeto a "y"

Propiedades

1. El número de términos es igual al grado absoluto más uno

$$\boxed{\#_t = G.A + 1}$$

2. Si el polinomio es completo y ordenado la diferencia de los grados relativos de dos términos consecutivos es igual a la unidad.

Polinomio Homogéneo:
Este polinomio se caracteriza por que todos sus términos tienen el mismo grado absoluto.
Ejm: Para el Polinomio:

$$P(x,y) = \underbrace{x^9}_{9^o} + \underbrace{2x^4y^5}_{9^o} + \underbrace{y^9}_{9^o}$$

$$G.A. = 9^o$$

Polinomio Entero "x": En este polinomio sus exponentes son enteros y positivos

a) $P(x) = -5x + 7$

b) $P(x) = 2x^2 - 3x - 2$

Polinomios Idénticos: Estos polinomios se caracterizan por que los coeficientes de sus términos semejantes en ambos miembros son iguales, en efecto:

Si:

$$a x^2 + b x + c \equiv d x^2 + ex + f$$

Se cumple que:

$$\begin{cases} a = d \\ b = e \\ c = f \end{cases}$$

Polinomios Idénticamente Nulos:

Estos polinomios se caracterizan por que sus coeficientes valen cero:

Ejemplo: dado
$P(x) = a x^2 + b x + c \equiv 0$

Se cumple que:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

EJERCICIOS

01.- Si:
$A(x-3) + B(x-2) \equiv 3x - 12$

Calcular : $E = \sqrt{\sqrt{A - B} + B}$

Solución
Dado que la identidad se cumple para cualquier valor de x, asignamos un valor de x para que una de las incógnitas "A" o "B" se cancelen, es decir:

$$A\underbrace{(x-3)}_{0} + B\underbrace{(x-2)}_{0} \equiv 3x - 12$$

1º) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$, de donde:
$A(3-3) + B(3-2) = 3(3) - 12$

$$\boxed{B = -3}$$

2º) $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$
$A(2-3) + B(2-2) = 3(2) - 12$
$-A = -6$

$$\boxed{A = 6}$$

Reemplazando en "E"

$$E = \sqrt[6]{\sqrt{6-(-3)} - 3} = \sqrt[6]{3-3}$$

$\therefore E = 0$ Rpta.

02.- Si el polinomio:
$P(x) = (a-2)x^2 + (b+3)x + 9x^2 - 5x$
Es nulo, hallar (a + b)

Solución
Si el polinomio es nulo, cada coeficiente vale cero, es decir:

$$P(x) = \underbrace{(a-2+9)}_{0}x^2 + \underbrace{(b+3-5)}_{0}x \equiv 0$$

1º) $a - 2 + 9 = 0 \rightarrow a = -7$
2º) $b + 3 - 5 = 0 \rightarrow b = 2$
$\therefore a + b = -7 + 2 = -5$ Rpta.

03.- Dado el polinomio homogéneo

$P(x, y) = x^{a+b-1}\, y^{b} - xy^{6} - 3y^{2a+3b-6}$

Determine:

$$E = (a^b + b^a - ab)^2$$

Solución

Por ser homogéneo, se cumple:

$$\underbrace{a+b-1+b}_{(\mathrm{I})} = \underbrace{1+6}_{(\mathrm{II})} = \underbrace{2a+3b-6}_{(\mathrm{III})}$$

De (I) y (II), se obtiene:

$$a + 2b = 8$$

De (II) y (III)

$$2a + 3b = 13$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} a + 2b = 8 & \ldots\ldots\ldots\ (1) \\ 2a + 3b = 13 & \ldots\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{24-26}{3-4} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{13-16}{3-4} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Por consiguiente el valor de "E" es:

$E = [\,2^3 + 3^2 - (2)(3)\,]^2 \rightarrow E = 121$ Rpta.

04.- Tres términos consecutivos de un polinomio ordenado y completo en forma descendente están representados por:

$P(x) = \ldots. + x^{a+b+1} - x^{2a-1} + 3bx^{3b-1} - \ldots.$

Calcular el valor de "a"

Solución

En este caso se cumple que la diferencia de dos exponentes consecutivos es igual a la unidad, es decir:

$$\begin{cases} a + b + 1 - (2a - 1) = 1 & \ldots\ldots\ldots\ (\alpha) \\ 2a - 1 - (3b - 1) = 1 & \ldots\ldots\ldots\ (\beta) \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} -a + b = -1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha) \\ 2a - 3b = 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\beta) \end{cases}$$

Resolviendo para "a"

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{3-1}{3-2} = \frac{2}{1} \quad \therefore a = 2 \quad \text{Rpta.}$$

2.6 NOTACIÓN DE POLINOMIOS

La notación de polinomios nos permite diferenciar las constantes de las variables; en efecto, para los polinomios.

A) $P(x) = x^3 + ax^2 - b^2 c$

La única variable es "x" y las constantes literales llamadas también parámetros son "a", "b" y "c".

B) $P(x, y) = x^4 - x^3 y^2 + 5ax + 6$

Las variables son las letras "x" e "y" y las constantes son "5", "a" y 6.

Este tipo de notación se hace extensible a cualquier tipo de expresión algebraica.

Ejm:

a) $P(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

b) $P(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

c) $P(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{x^2-y^3} + xy - 9$

EJERCICIOS

01.- Sabiendo que:

$$P(x) = \frac{5x-3}{9x-5}$$

Calcular: $P(P(x))$

Solución

Reemplazando, x por P(x)

$$P(P(x)) = \frac{5P(x)-3}{9P(x)-5}$$

Como P(x), es conocido

$$P(P(x)) = \frac{5\left(\frac{5x-3}{9x-5}\right)-3}{9\left(\frac{5x-3}{9x-5}\right)-5}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$P\,(P(x)) = \frac{25\,x-15-27\,x+15}{45\,x-27-45\,x+25}$$

$$P\,(P(x)) = \frac{-2x}{-2} \quad \rightarrow P\,(P(x)) = X \quad \text{Rpta.}$$

02.- Si; $F\left(\frac{x-2}{x-5}\right) = x^3 - x^2 + x - 1$

Calcular: $E = F(4)$

Solución

Para calcular F(4), hacemos:

$$\frac{x-2}{x-5} = 4 \quad \rightarrow x - 2 = 4\,x - 20$$

$$18 = 3x$$

$$x = 6$$

Con la cual:

$F\,(4) = (6)^3 - (6)^2 + (6) - 1$

$F\,(4) = 185$ Rpta.

03.- Si; **f**$(x) = ax - b$

y : $g(x) = bx - a$

Hallar; $h(x) = f(g\,(x)) - g\,(f\,(x))$

Solución

Operando por partes, tendríamos:

1º) $f\,(g\,(x)) = a\,g(x) - b$

$f\,(g\,(x)) = a\,(bx-a) - b$

$f\,(g\,(x)) = abx - a^2 - b$

2º) $g\,(f(x)) = b\,f(x) - a$

$g\,(f(x)) = b\,(ax - b) - a$

$g\,(f(x)) = abx - b^2 - a$

De donde:

$h\,(x) = abx - a^2 - b - ab\,x + b^2 + a$

$h\,(x) = b^2 - a^2 + a - b$ Rpta.

04.- Si; $P\,(P(P(x))) = 216x - 215$

Calcular: $P\,(x + 2)$

Solución

Como en la condición el segundo miembro es una expresión de primer grado, entonces P(x) también es de primer grado, es decir:

$P\,(x) = a\,x + b$

Operando por partes, tendríamos:

1) $P\,(P(x)) = a\,P(x) + b$

$P\,(P(x)) = a\,(ax + b) + b$

$P\,(P(x)) = a^2x + ab + b$

2) $P(P(P(x))) = a+b(a^2z + ab+b) + b$

$P(P(P(x))) = a^3\,x + a^2b + ab + b$

Teniendo en cuenta la condición:

$$a^3\,x + a^2\,b + ab + b \equiv 216\,x - 215$$

Al comparar:

i) $a^3 = 216 \;\rightarrow\; a = \sqrt[3]{216} \rightarrow a = 6$

ii) $a^2b + ab + b = -215$

$36\,b + 6b + b = -215$

$43\,b = -215$

$b = -5$

Por consiguiente:

$P\,(x) = a\,x + b = 6\,x - 5$

y : $P\,(x+2) = 6(x+2) - 5 = 6x+7$ Rpta.

2.7 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER GRADO.

Determinante de orden 2.- Es el desarrollo de una matriz cuadrada que presenta dos filas y dos columnas y cuya representación matemática y desarrollo es:

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\,b_2 - a_2\,b_1$$

D_s : Diagonal Secundaria

D_p : Diagonal principal

Ejemplo: El desarrollo de:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}, \text{ es :}$$

$\Delta_2 = D_p - D_s = 5(-5) - (-3)(4)$
$\Delta_2 = -25 + 12 = -13 \rightarrow \Delta_2 = -13$

Determinante de orden de tres.- Es el desarrollo de una matriz cuadrada de 3 filas y 3 columnas; su representación matemática es:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Y su desarrollo por menores complementarios; es:

$$\Delta_3 = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ó también
$\Delta_3 = a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - b_1\,(a_2\,c_3 - a_3\,c_2) +$
$+\ c_1\,(a_2b_3 - a_3b_2)$

Ejemplo: Calcular:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando

$$\Delta_3 = 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$\Delta_3 = 2\,(1 + 6) + 3\,(-4 + 10) + 1\,(12 + 5)$
$\Delta_3 = 14 + 18 + 17 \qquad \therefore\ \Delta_3 = 49$

2.8 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y = c_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha) \\ a_2\,x + b_2\,y = c_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\beta) \end{cases}$$

Su resolución por la regla de Kramer teniendo en cuenta que: $(a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \neq 0)$ es:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_2};$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Donde:
Δ_x = Determinante de x
Δ_y = Determinante de y
Δ_s = Determinante del sistema

Ejemplo 1.- Calcular "x" en el sistema:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha) \\ 4x - 5y = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta) \end{cases}$$

Solución:
De acuerdo a la teoría:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-55+3}{-25+12} = \frac{-52}{-13}$$

$\therefore\ x = 4$ Rpta.

Ejemplo 2.- Calcular "y" en el sistema:

$$\begin{cases} -7\,x + 5y = -45 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha) \\ 4x - 3y = 26 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\beta) \end{cases}$$

Solución
Para el cálculo de "y" tenemos:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -45 \\ 4 & 26 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-182+180}{21-20} = \frac{-2}{1}$$

$\therefore\ y = -2$ Rpta.

DISCUSIÓN DE LA SOLUCIÓN

1. Si: Δ_x, $\Delta_y \in R$ y $\Delta_s \neq 0$ el sistema es compatible determinado, y hay una solución única.
2. Si: $\Delta_x = 0$; $\Delta_y = 0$ y $\Delta_s = 0$, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

3. Si $\Delta_x \neq 0$; $\Delta_y \neq 0$ y $\Delta_s = 0$, el sistema es incompatible, no tiene solución.
   Ejemplo: Dado el sistema

$$\begin{cases} 2x + ky = 5k \;\ldots\ldots\ldots\; (\alpha) \\ 5x - 4y = -27 \;\ldots\ldots\ldots\; (\beta) \end{cases}$$

   para que valor de "K"; es incompatible

Solución

Calculando "x", vemos que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5k & k \\ -27 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 5 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-20k + 27K}{-8 - 5K} = \frac{7K}{-5K - 8}$$

Para que no exista solución debe cumplirse que:

$$-5k - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{-8}{5} \qquad \text{Rpta.}$$

2.9 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (\alpha) \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (\beta) \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (\gamma) \end{cases}$$

Su resolución por la regla de KRAMER, (donde $\Delta s \neq 0$) es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta_s}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta_s}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_s}$$

Ejemplo 1: Calcular el valor de "y" en el sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 6 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1) \\ 7x + 3y - 4z = 6 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2) \\ -2x + 4y + 3z = 5 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3) \end{cases}$$

Solución

Por determinantes, se tendría:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 7 & 6 & -4 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 7 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5(38) - 6(13) + 3(47)}{5(25) + 2(13) + 3(34)}$$

$$y = \frac{190 - 78 + 141}{125 + 26 + 102} = \frac{253}{253}$$

$$\therefore\; y = 1 \quad \text{Rpta.}$$

DISCUSIÓN DE LA SOLUCIÓN:

1. Si: Δx, Δy, $\Delta z \in R$ y $\Delta s \neq 0$, el sistema es compatible determinado.

2. Si $\Delta x = 0$; $\Delta y = 0$; $\Delta z = 0$ y $\Delta s = 0$, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

3. Si $\Delta x \neq 0$; $\Delta y \neq 0$, y $\Delta s \neq 0$, el sistema es incompatible, no tiene solución:
   Ejemplo: Dado el sistema:

$$\begin{cases} -2k\,x - 3\,y + (k+5)\,z = 13 & \ldots\ldots\ldots\ (1)\\ x + y - z = 0 & \ldots\ldots\ldots\ (2)\\ 3\,x - 2\,y + 2\,z = 10 & \ldots\ldots\ldots\ (3)\end{cases}$$

¿Para que valor de "k"; el sistema es compatible indeterminado?

Solución

Calculando "x" vemos que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -3 & k+5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2k & -3 & k+5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}$$

De donde:

$$x = \frac{13\,(0) + 3\,(10) \quad + (k+5)\ (-10)}{-2\,k\,(0) + 3\,(5) \quad + (k+5)\,(-5)}$$

$$x = \frac{30 - 10\,k - 50}{15 - 5\,k - 25} = \frac{-10k - 20}{-5k - 10}$$

Para que sea compatible indeterminado:

$$X = \frac{0}{0}$$

1) $-10\,k - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad K = -2$

2) $-5\,k - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad K = -2$

$\therefore$ k = -2 Rpta.

PRODUCTOS NOTABLES-IDENTIDADES ECUACIÓN DE 2DO GRADO

3.1 PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables son fórmulas que permiten efectuar multiplicaciones indicadas, sin aplicar los criterios generales de la multiplicación algebraica, y deben satisfacer las siguientes propiedades:

PROP. 1 El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores, en efecto:

$$G^o_{producto} = \Sigma\, G^o_{factores}$$

Ejemplo. 1: Hallar el grado de P(x)
Si: $P(x)=(x^4+3)\,(x^6-2x-3)\,(x^3-4)$

Solución:

Observemos que el grado en cada paréntesis es:

$$P(x) = \underbrace{(x^4+3)}_{G^o\,=\,4}\;\underbrace{(x^6-2x-3)}_{G^o\,=\,6}\;\underbrace{(x^3-4)}_{G^o\,=\,3}$$

$\therefore\ G^o\,[P(x)] = 4 + 6 + 3 = 13$

Ejemplo 2: Hallar el grado de R(x)
Si: $R(x) = (x^2+5)^3\ (x^4-1)^6$

Solución:

Para este caso, el grado correspondiente en cada paréntesis es:

$$R(x) = \underbrace{(x^2+5)}_{6}{}^{3}\;\underbrace{(x^4-1)}_{24}{}^{6}$$

$\therefore\ G^o\,[R(x)] = 6 + 24 = 30$

PROP. 2

El término independiente del producto es igual al producto de los términos independientesde los factores, es decir:

$$T.I._{producto} = \pi\,(T.I._{factores})$$

Ejemplo 1: Hallar el término independiente de P(x) en:
$P(x) = (x^3-x+2)\,(x^4-x-6)\,(x^7-3)$

Solución

El término independiente en cada paréntesis es:

$$P(x) = \underbrace{(x^3-x+2)}_{T.I\,=\,2}\;\underbrace{(x^4-x-6)}_{T.I\,=\,-6}\;\underbrace{(x^7-3)}_{T.I\,=\,-3}$$

$\therefore\ T.I.\,[P(x)] = (2)\,(-6)\,(-3) = 36$

Ejemplo 2: Hallar el término independiente de P(x) en:
$P(x) = (x^2-1)^5\ \ (x^4-x^3-2)^3$.

Solución:

En este caso, el término independiente en cada paréntesis es:

$$P(x) = \underbrace{(x^2-1)^5}_{T.I.=\,(-1)^5}\;\underbrace{(x^4-x^3-2)^3}_{T.I.\,=\,(-2)^3}$$

$\therefore\ T.I.\,[P(x)] = (-1)^5\,(-2)^3 = (-1)\,(-8) = 8$

OBSERVACIONES

Debemos tener en cuenta las siguientes potenciaciones, respecto a los radicales monómicos.

1) $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}\ \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$
2) $(\sqrt{2})^2 = 2$
3) $(2\sqrt{2})^2 = 2^2\sqrt{2}^{\,2} = 4\,(2) = 8$
4) $(3\sqrt{2})^2 = 3^2\ \sqrt{2}^{\,2} = 9\,(2) = 18$
5) $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}\ \sqrt{2}\ \sqrt{2} = \sqrt{4}\ \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
6) $(2\sqrt{2})^3 = 2^3.\sqrt{2}^{\,3} = 8(2\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}$
7) $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3}\ \sqrt{3}\ \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
8) $(3\sqrt{3})^3 = 3^3.\sqrt{3}^{\,3} = 27\,(3\sqrt{3}) = 81\sqrt{3}$

Para un entendimiento coherente respecto a los productos notables y las identidades, los observaremos por grupos:

3.2 **GRUPO: I**

I. Cuadrado del Binomio
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

II. Cubo del Binomio
* $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$
* $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

Estas mismas fórmulas se pueden expresar bajo las formas:
* $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$
* $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$

III. Diferencia de cuadrados (suma por diferencia)
* $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

IV. Suma y Diferencia de cubos
* $(a + b)\,(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
* $(a - b)\,(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

3.3 **EJERCICIOS**

01. Efectuar
$R = (x+a)\,(x-a)\,(x^2 + a^2)\,(x^4 + a^4) + a^8$

Solución
Teniendo en cuenta que:

$$\boxed{(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2}$$

Entonces:
* $(x + a)\,(x - a) = x^2 - a^2$
* $(x^2 - a^2)\, x^2 + a^2) = x^4 - a^4$
* $(x^4 - a^4)\,(x^4 + a^4) = x^8 - a^8$

Por consiguiente:
$R = x^8 - a^8 + a^8 \rightarrow \boxed{R = x^8}$

02. Simplificar:
$S = \sqrt[n]{2+\sqrt{3}}\,.\,\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}\,.$

Solución
Dado que:

$$\boxed{\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}} \quad \Leftrightarrow a > 0 \wedge b > 0$$

$S = \sqrt[n]{(2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})} = \sqrt[n]{2^2 - \sqrt{3}^2}$

$S = \sqrt[n]{4-3} \qquad \rightarrow \boxed{S = \sqrt[n]{1} = 1}$ Rpta.

03. Calcular: $R = (\sqrt{2} - 1)^5$
Solución:
Expresando convenientemente, se tendría:
$R = [(\sqrt{2} - 1)^2]^2\,(\sqrt{2} - 1)$

Operando por partes:
$[(\sqrt{2} - 1)^2]^2 = (2 - 2\sqrt{2} + 1)^2 = (3 - 2\sqrt{2})^2$
$= 9 - 12\sqrt{2} + 8$
$= 17 - 12\sqrt{2}$

Con lo cual, se tendría:
$R = (17 - 12\sqrt{2})\,(\sqrt{2} - 1)$
$R = 17\sqrt{2} - 17 - 24 + 12\sqrt{2}$
$\boxed{R = 29\sqrt{2} - 41}$ Rpta.

04. Si: $x - x^{-1} = \sqrt{6}$
Calcular $x^3 + x^{-3}$

Solución
Elevando la condición al cubo, se obtiene:
$(x + x^{-1})^3 = (\sqrt{6})^3$
$x^3 + x^{-3} + 3x\,.\,x^{-1}\,(x + x^{-1}) = 6\sqrt{6}$
Dado que: $x + x^{-1} = \sqrt{6}$
$x^3 + x^{-3} + 3\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$
$\boxed{\therefore\ x^3 + x^{-3} = 3\sqrt{6}}$ Rpta.

3.4 **GRUPO: II**

V. Multiplicación de binomios con un término en común.

*) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

**) $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$

VI. Cuadrado del trinomio

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

VII. Cubo del trinomio

Forma 1:

$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$

Forma 2:

$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$

3.5 **EJERCICIOS**

01. Simplificar

$$S = (a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2$$

Solución

Desarrollando cada término, se tendría:

$$\begin{aligned} S = \; & a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ & a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc \\ & a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc \\ & a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc \end{aligned}$$

$S = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$

Factorizando "4": $\boxed{S = 4(a^2 + b^2 + c^2)}$ Rpta

02. Simplificar:

$$S = (a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (a - b + c)^3 - (-a + b + c)^3$$

Solución:

Haciendo el cambio de variables: $\begin{cases} a + b = x \\ a - b = y \end{cases}$

se tendría en S.

$S = (x + c)^3 - (x - c)^3 - (c + y)^3 - (c - y)^3$

Desarrollando cada término

$$\begin{aligned} S = \; & x^3 + 3x^2c + 3xc^2 + c^3 \\ & -x^3 + 3x^2c - 3xc^2 + c^3 \\ & -c^3 - 3c^2y - 3cy^2 - y^3 \\ & -c^3 + 3c^2y^2 - 3cy^2 + y^3 \end{aligned}$$

$S = 6x^2c - 6c^2y^2$

$S = 6c[x^2 - y^2]$

Volviendo a las variables originales:

$S = 6c[(a + b)^2 - (a - b)^2]$

$S = 6c[a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2]$

$S = 6c[4ab] \rightarrow \boxed{S = 24\,abc}$ Rpta.

03. Sabiendo que:

$$F = \sqrt{(x-5)(x+6)(x-1)(x+2)+196}$$

Hallar : $G = \sqrt{F + 16,25}$

Solución:

Observemos que:

$F = \sqrt{(x-5)(x+6)(x-1)(x+2)+196}$

Se transforma en:

$F = \sqrt{(x^2 + x - 30)(x^2 + x - 2) + 196}$

Haciendo : $x^2 + x = a$

$F = \sqrt{(a-30)(a-2) + 196}$

$F = \sqrt{a^2 - 32a + 256}$

Como la cantidad subradical es un cuadrado perfecto.

$F = \sqrt{(a-16)^2} \rightarrow F = a - 16$

ó : $F = x^2 + x - 16$

Reemplazando en G:

$G = \sqrt{x^2 + x - 16 + 16,25}$

$G = \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}$

Siendo la cantidad sub-radical, un cuadrado perfecto

$$G = \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2} \quad \rightarrow \quad G = x + \frac{1}{2}$$

ó lo que es lo mismo

$$\boxed{G = \frac{2x+1}{2}} \qquad \text{Rpta.}$$

3.6 GRUPO: III

IDENTIDADES

Son expresiones algebraicas que nos permite efectuar operaciones por simple inspección, entre las de mayor importancia, tenemos:

VIII. Identidades de Legendre

1º) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

2º) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

IX. Identidades de Lagrange

1º) $(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

2º) $(ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (az-cx)^2 + (bz-cy)^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

X. Identidades de Gauss:

1º) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$

2º) $\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2] = a^3+b^3+c^3-3abc$

XI. Identidades de Argand

1º) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) = x^4+x^2y^2+y^4$

2º) $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1$

3.7 IGUALDADES CONDICIONALES

A) Si : $a+b+c=0$; se verifica que:

1.) $a^2+b^2+c^2 = -2(ab+ac+bc)$

2.) $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 = (ab+ac+bc)^2$

3.) $a^3+b^3+c^3 = 3abc$

4.) $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right) = \frac{a^5+b^5+c^5}{5}$

5.) $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right) = \frac{a^7+b^7+c^7}{7}$

B) Si: $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+b$
$\Rightarrow a = b = c$

C) Si : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y} \Rightarrow x = y$

3.8 EJERCICIOS

01.- Sabiendo que; $\frac{a}{x^9}+\frac{x^9}{a}=7$

Calcular: $\sqrt[4]{\frac{a}{x^9}}+\sqrt[4]{\frac{x^9}{a}}$

Solución

Sea E : $\sqrt[4]{\frac{a}{x^9}}+\sqrt[4]{\frac{x^9}{a}}$

Elevando el cuadrado, se obtiene:

$$E^2 = \sqrt{\frac{a}{x^9}} + 2\sqrt[4]{\frac{a}{x^9}}\bullet\sqrt[4]{\frac{x^9}{a}} + \sqrt{\frac{x^9}{a}}$$

$$E^2-2 = \sqrt{\frac{a}{x^9}}+\sqrt{\frac{x^9}{a}}$$

Nuevamente elevando el cuadrado obtenemos:

$$(E^2-2)^2 = \frac{a}{x^9}+\frac{x^9}{a}+2$$

Reemplazando el valor de la condición:
$$E^2 - 2 = \sqrt{7+2} = 3$$

De donde:
$E^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \sqrt{5}}$ Rpta.

02.- Si: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{x+y}$

Calcular:
$$\mathbf{R} = \frac{x^2+y^2}{2\,x\,y} - \frac{x}{y}$$

Solución
Operando en la condición:
$$\frac{x+y}{x\,y} = \frac{4}{x+y}$$
Por proporciones:
$$(x + y)^2 = 4xy$$

Desarrollando y simplificando, vemos que:
$$x^2 + 2\,x\,y + y^2 = 4x\,y$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

$$(x - y)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = y}$$
Reemplazando "x" por "y" en R; se obtiene:
$$R = \frac{y^2+y^2}{2\,y^2} - \frac{y}{y} = 1 - 1$$
$\therefore \boxed{R \ = \ 0}$ Rpta.

3.9 ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE

Son aquellas ecuaciones que pueden reducirse a la forma:

$$\boxed{a\,x^2 + b\,x + c = 0} \qquad (a \neq 0)$$

donde:
ax^2 = Término cuadrático
bx = Término Lineal
c = Término independiente

a, b y c son los coeficientes respectivos de sus términos.

3.10 RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

I. Por factorización.- Si el discriminante de la ecuación:
($\Delta = b^2 - 4\,ac$) es un cuadrado perfecto, es decir:
$\Delta \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ldots\}$

Para su solución aplicamos aspa simple

Ejemplo: Resolver
$10\,x^2 + 11\,x - 6 = 0$

Solución
Para esta ecuación: a = 10, b=11 y c = -6; el discriminante es:
$\Delta = (11)^2 - 4\,(10)\,(-6) = 361$

como, 361 es un cuadrado perfecto la ecuación se puede factorizar.

$$10\,x^2 + 11\,x - 6 = 0$$
$2\,x \qquad 3 \quad \rightarrow 15\,x$
$5x \qquad -2 \quad \rightarrow \frac{-4x}{11x}$

Con lo cual:
$(2x + 3)\,(5\,x - 2) = 0$

Recordemos que:

$$\boxed{\text{Si: } a.\,b = 0 \ \Rightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0}$$

en nuestro caso : $x = \frac{-3}{2} \quad \vee \quad x = \frac{2}{5}$

II. Por fórmula.- Se aplica la fórmula cuando la factorización no es inmediata

Deducción:
Sea la ecuación:
$$ax^2 + bx + c \neq 0$$

dividiendo entre "a"

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

adicionando : $\left(\frac{\text{Coeficiente de } x}{2}\right)^2$

a los dos miembros de la igualdad:

$$x^2 + \frac{b^2}{4a^2}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$$

dado que los tres primeros términos forman un trinomio cuadrado perfecto, se tendría:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

extrayendo raíz cuadrada

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las dos soluciones o raíces son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array}}$$

De otro lado, siendo: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}}$$

Ejemplo: Resolver : $x^2 - x - 1 = 0$

Solución

En este caso: $\left\{\begin{array}{l} a = 1;\ b = -1;\ c = -1 \\ \Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) \\ \Delta = 5 \end{array}\right.$

Con lo cual:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

3.11 NATURALEZA DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

En la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$; se cumple que:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}}$$

Las raíces de la ecuación de segundo grado, depende de la cantidad subradical.

$\Delta = b^2 - 4ac$ (Discriminante)

De acuerdo a esto:

1º.- Si: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$; las dos raíces son reales y diferentes.

2º.- Si: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$; las dos raíces son reales e iguales.

3º.- Si: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$; las dos raíces son números complejos y conjugados.

Ejemplo: Hallar los valores de "k" en la ecuación:

$(k + 1)x^2 - (5k - 3)x + 9 = 0$

Sabiendo que sus raíces son iguales

Solución

Desde que las raíces son iguales entonces: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, es decir:

$[-(5k - 3)]^2 - 4(k + 1)(9) = 0$

desarrollando, obtenemos la ecuación:

$$25k^2 - 66k - 27 = 0$$

$$\begin{array}{lll} 25k & 9 & \to 9k \\ k & -3 & \to -75k \\ & & \overline{-66k} \end{array}$$

de donde:

$$(25\,k + 9)\,(k-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ \vee \\ k = \dfrac{9}{25} \end{cases}$$

3.12 PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Siendo la ecuación del Segundo grado:
$ax^2 + b\,x + c = 0 \quad ; \quad a \neq 0$

Sus raíces son:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2+4\,ac}}{2\,a}$$

de donde se cumple:

1º) Suma de las raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2º) Producto de las raíces:

$$x_1 + x_2 = \frac{c}{a}$$

3º) Diferencia de las raíces:

$$x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}; \quad (x, > x_2)$$

Ejemplo: ¿Qué relación guardan los coeficientes de la ecuación:
$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$
Si una de sus raíces es el triple de la otra?.

Solución
De acuerdo a los datos, se tiene:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \;\ldots\ldots\ldots & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \;\ldots\ldots\ldots & (2) \\ x_1 = 3x_2 \;\ldots\ldots\ldots & (3) \end{cases}$$

reemplazando, (3) en (1):

$$3x_2 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow x_2 = -\frac{b}{4a}$$

Asimismo: $\qquad x_1 = -\dfrac{3b}{4a}$

Reemplazando en (2), tendríamos:

$$\left(\frac{-3b}{4a}\right)\left(\frac{-b}{4a}\right) = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{3b^2 = 16\,a\,c}$$

3.13 FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CONOCIENDO SUS RAÍCES

I. Conociendo : "x_1" y "x_2", raíces de la ecuación de segundo grado, se cumple que:

$$(x - x_1)\,(x - x_2) = 0$$

llevando a la forma canónica, se tendría la fórmula:

$$\boxed{\mathbf{x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1\,x_2 = 0}}$$

II. Conociendo la suma de las raíces : $S = x_1 + x_2$ y el producto de ellas mismas $P = x_1 \,.\, x_2$, la fórmula a utilizar es:

$$\boxed{\mathbf{x^2 - Sx + P = 0}}$$

Ejemplo: Formar una ecuación de segundo grado de coeficientes reales, si una de sus raíces es: $2 + \sqrt{6}$.

Solución

Como las raíces irracionales se presentan por pares conjugados, entonces:

$$x_1 = 2 + \sqrt{6} \quad \wedge \quad x_2 = 2 - \sqrt{6}$$

con lo cual:

i) $x_1 + x_2 = 2 + \sqrt{6} + 2 - \sqrt{6} = 4$

ii) $x_1 + x_2 = (2+\sqrt{6}\,)\,(2-\sqrt{6}\,) = 4-6=-2$

Reemplazando en la fórmula, obtenemos la ecuación:

$\boxed{x^2 - 4x - 2 = 0}$ (Rpta.)

Ejemplo: Formar una ecuación de segundo grado de coeficientes reales, si una de sus raíces es:

3 + 2i; $\boxed{i = \sqrt{-1} \text{ tal que: } i^2 = -1}$

"i" es la unidad imaginaria.

Solución

Siendo: $x_1 = 3 + 2i \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3 - 2i$

Ya que las raíces complejas se presentan por pares conjugados se tiene que:

i) $x_1 + x_2 = 3 + 2i + 3 - 2i = 6$

ii) $x_1 x_2 = (3+2i)(3-2i) = 9 - 4i^2 = 13$

reemplazando en la fórmula, se obtiene:

$\boxed{x^2 - 6x + 13 = 0}$ Rpta.

3.14 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO QUE TIENEN LAS MISMAS RAÍCES

Las ecuaciones:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0; \ (a \neq 0) \ .... \ (1) \\ dx^2 + ex + f = 0; \ (d \neq 0) \ .... \ (2) \end{cases}$$

Tienen las mismas raíces, si:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

Ejm: Calcular "a" y "b" en las ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{(a - 3)x^2 - (a - 4)\,x + 3 = 0; \ .... \ (1)} \\ \mathbf{(b + 1)x^2 - (2b - 4)\,x + 6 = 0; \ .... \ (2)} \end{cases}$$

Sabiendo que tienen las mismas raíces:

Solución

Ya que las raíces son las mismas, se cumple que:

$$\frac{a-3}{b+1} = \frac{a-4}{2b-4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

de donde obtenemos, el sistema:

$$\begin{cases} 2a - b = 7 \ .... \ (\alpha) \\ a - b = 2 \ .... \ (\beta) \end{cases}$$

resolviendo (α) y (β), obtenemos:

$\boxed{a = 5} \quad \wedge \quad \boxed{b = 3}$

3.15 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO QUE TIENEN UNA RAÍZ COMÚN

Las ecuaciones:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \quad .... \ (1) \\ dx^2 + ex + f = 0 \quad .... \ (2) \end{cases}$$

tienen una raíz común; se elimina "x^2" y se obtiene la raíz común; es decir:

$$\begin{cases} adx^2 + bdx + cd = 0 \ ...... \ (\alpha) \\ adx^2 + aex + af = 0 \ ...... \ (\beta) \end{cases}$$

restando (α) – (β); se obtiene:

$x\,(bd - ae) + (cd - af) = 0$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{af - cd}{bd - ae}}$$

OBSERVACIONES

01. En la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad a \neq 0$
Las raíces son numéricamente iguales y de signo contrario.

Si : $\boxed{b = 0}$

02. En la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$
Las raíces, son recíprocas.

Si : $\boxed{a = c}$

DIVISIÓN ALGEBRAICA TEOREMA DEL RESTO

4.1 DIVISIÓN ALGEBRAICA

Es la operación inversa a la multiplicación que tiene por objeto hallar una expresión algebraica llamado cociente; obtenida de otras dos expresiones algebraicas llamadas dividendo y divisor, de tal forma que el valor numérico del cociente sea igual al cociente de los valores numéricos del dividendo y divisor, para cualquier sistema de valores atribuidos a sus letras.

ELEMENTOS DE UNA DIVISIÓN

Dividendo .... : D
Divisor .... : d
Cociente .... : Q
Resto o residuo .... : R

A) Cociente exacto (R ≡ 0).- El resto de la división es un polinomio idénticamente nulo.

$$D = d\,Q \qquad ó \qquad \frac{D}{d} = Q$$

B) Cociente inexacto (R ≠ 0).- El resto de la división es un polinomio no nulo.

$$D = d\,Q + R \qquad ó \qquad \frac{D}{d} = Q + \frac{R}{d}$$

1. En toda división algebraica el grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.

4.2 PROPIEDADES GENERALES DE LA DIVISIÓN ALGEBRAICA

$$Q^o = D^o - d^o$$

2. En toda división algebraica el grado del residuo máximo es una unidad menos que el grado del divisor.

$$R^o{}_{max} = d^o - 1$$

3. En toda división algebraica el término independiente del dividendo es igual al producto de los términos independientes del divisor por el cociente más el termino independiente del residuo.

$$T.I_D = T.I_d \times T.I_Q + T.I_R$$

4. Cuando se dividen polinomios homogéneos, el cociente y residuo, también son homogéneos, pero el grado absoluto del residuo es igual al grado absoluto del dividendo.

$$G.A.\ (R) = G.A.\ (D)$$

4.3 CASOS DE LA DIVISIÓN

I.- Para el caso de dos monomios

i) Se dividen los signos de acuerdo a la regla de los signos

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{+}{+} = + \\ \frac{-}{-} = + \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{+}{-} = - \\ \frac{-}{+} = - \end{array}\right.$$

ii) Se dividen los coeficientes

iii) Se dividen las letras aplicando las leyes de exponentes

a) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ b) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

II.- Para el caso de dos polinomios
Podemos utilizar cualquiera de los siguientes métodos:

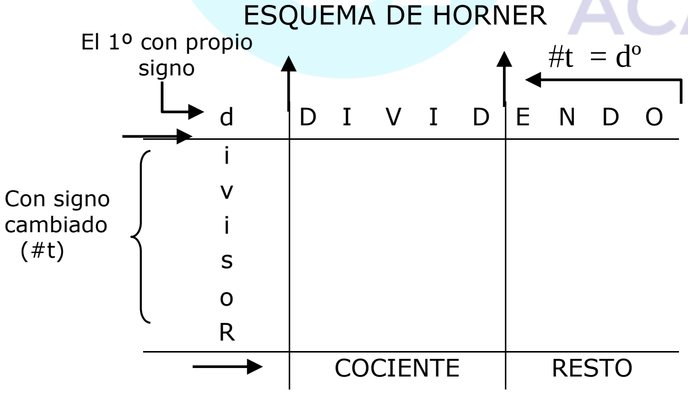
a) Método general o normal
b) Método de los coeficientes indeterminados.
c) Método de Horner
d) Regla de Ruffini

Observación .- En la división de dos polinomios estos deben ser completos y ordenados en forma descendente, con respecto a una letra llamada ordenatriz; si faltase alguna variable, ya sea en el dividendo o en el divisor, se completarán con ceros.

4.4 DIVISIÓN POR HORNER

Este método es aplicable para polinomios completos y ordenados en forma descendente, con respecto a una de sus letras, llamada ordenatriz. Así tenemos:

ESQUEMA DE HORNER



Ejemplo.- Efectuar por Horner:

$$\frac{12x^4 - 17x^3 + 20x^2 - 8x + 7}{4x^2 - 3x - 2}$$

Solución
Observemos que:

$$\begin{cases} Q^o = D^o - d^o = 4 - 2 = 2 \\ R^o_{max} = d^o - 1 = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

Como los polinomios son completos y ordenados; de acuerdo al esquema de Horner se disponen los términos de la siguiente forma:

4	12	- 17	+ 20	- 8	+ 7
3					
2					

A continuación aplicamos los siguientes pasos:

1. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, obteniendo el primer término del cociente.
2. El primer término del cociente multiplica a los términos con signo cambiado del divisor y el producto se escribe en la segunda fila debajo de los términos de dividendo corriendo un lugar a la derecha.
3. Se reduce la siguiente columna y el resultado se divide entre el primer término del divisor obteniendo el segundo término del cociente el cual multiplica a los términos cambiados del divisor. El producto resultante se escribe en la tercera fila, debajo de los términos del dividendo corriendo un lugar a la derecha.
4. Se continua este procedimiento hasta obtener un término debajo del último término del dividendo.
5. Los coeficientes del resto o residuo, se obtienen directamente de cada una de las columnas que le pertenecen.

Respecto al ejemplo dado, tendríamos:

	12	-8	20		
÷ 4	12	- 17	+ 20	- 8	+ 7
3		9	+ 6		
			- 6	- 4	
				15	+ 10
2					
	$\underbrace{3}_{x^2}$	$\underbrace{-2}_{x}$	$\underbrace{+5}_{T.I.}$	$\underbrace{3}_{x}$	$\underbrace{+17}_{T.I.}$

de donde:

$$\begin{cases} Q(x) = 3x^2 - 2x + 5 & \text{(cociente)} \\ R(x) = 3x + 17 & \text{(Resto)} \end{cases}$$

Ejemplo: Efectuar por Horner

$$\frac{12a^4 - 23a^3b + 51a^2b^2 - 30ab^3 + 20b^4}{4a^2 - 5ab + 7b^2}$$

Solución

De acuerdo a las propiedades observamos (respecto a la letra "a")

$$\begin{cases} Q^o = D^o - d^o = 4 - 2 = 2 \\ R^o_{max} = d^o - 1 = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

Además:

G.A. (D^o) = G.A. (R^o) = 4

Por Horner, se tendría:

	12	-8	20		
÷ 4	12	- 23	+ 51	- 30	+ 20
5		15	- 21		
			- 10	+ 14	
-7				25	- 35
	3	- 2	+ 5	9	- 15

Por consiguiente:

$$\begin{cases} Q(a, b) = 3a^2 - 2ab + 5b^2 \\ R(a, b) = 9ab^3 - 15b^4 \end{cases}$$

4.5 CÁLCULO DE COEFICIENTES EN EL DIVIDENDO O EN EL DIVISOR

En la solución de estos problemas debemos tener en cuenta las siguientes reglas:

Regla Nº 1.- Dos polinomios son divisibles, o uno de ellos es múltiplo de otro, o nos dicen que la división entre ellos es exacta; cuando el resto o residuo de la división es un polinomio nulo.

Regla Nº 2.- Si en una división nos dan como dato el resto, entonces el resto obtenido por Horner y el resto que es dato son polinomios idénticos.

Regla Nº 3.- En toda división exacta los coeficientes del dividendo y del divisor se pueden escribir en sentido contrario y al efectuar la división esta sigue siendo exacta.

Ejemplo 1.- Calcular "a" y "b" en la división exacta:

$$\frac{2x^4 - x^3 + ax - b}{x^2 - x - 2}$$

Solución:

Por Horner tendríamos:

	2	1	5		
÷ 1	2	- 1	+ 0	+ a	- b
1		2	+ 4		
			1	+ 2	
2				5	+ 10
	2	+ 1	+ 5	0	+ 0

Aquí vemos que:

i) a + 2 + 5 = 0 $\Rightarrow$ $\boxed{a = -7}$ Rpta.

ii) –b + 10 = 0 $\Rightarrow$ $\boxed{b = 10}$ Rpta.

Ejemplo 2.- Calcular "a" y "b" en la división:

$$\frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 - ax - b}{x^2 - x + 1}$$

Sabiendo que su resto es 4 x – 3

Solución:

Aplicando el método de Horner:

	3	2	1		
÷ 1	3	- 1	+ 2	- a	- b
1		3	- 3		
			2	- 2	
-1				1	- 1
	3	+ 2	+ 1	4	- 3

De las columnas del resto

Vemos que:

i) -a - 2 + 1 = 4 $\Rightarrow$ $\boxed{a = -5}$ Rpta.

ii) −b − 1 = -3 $\Rightarrow$ $\boxed{b = 2}$ Rpta.

Ejemplo 3.- Calcular "a" y "b" en la división exacta (Horner inverso)

$$\frac{ax^4 - bx^3 - x^2 - x - 2}{x^2 - x - 1}$$

<u>Solución:</u>

Escribiendo los coeficientes en sentido contrario, se tendría el siguiente esquema de Horner:

	-2	1	-4		
-1	-2	- 1	- 1	- b	+ a
1		2	- 2		
			-1	+ 1	
-1				4	- 4
	2	- 1	+ 4	0	+ 0

De donde:

i) -b + 1 + 4 = 0 $\Rightarrow$ $\boxed{b = 5}$ Rpta.

ii) a − 4 = 0 $\Rightarrow$ $\boxed{a = 4}$ Rpta.

4.6 DIVISIÓN POR RUFFINI

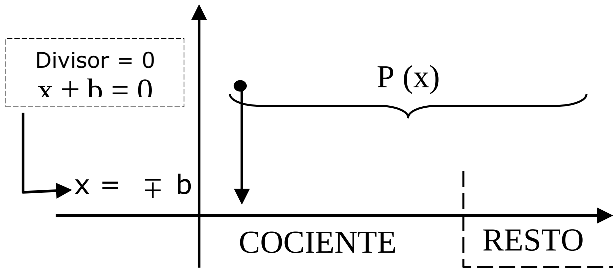
Este método es aplicable para divisores, binomios o transformables a binomios; es un caso particular de la división por Horner. Se presentan dos casos:

I.- Primer caso : $\boxed{\mathbf{P(x) \div x \pm b}}$

Dividendo : P(x)

Divisor : x ± b

Esquema de Ruffini:



El primer elemento del dividendo se baja y corresponde al primer elemento del cociente, se procede como en la división por Horner y el resultado de reducir la última columna es el resto de la división.

Ejemplo # 1 : Efectuar:

$$\frac{2x^4 - x^2 + 3x - 2}{x + 2}$$

<u>Solución</u>

Del esquema de Ruffini, tendríamos:

x + 2 = 0	2	+ 0	− 1	+ 3	- 2
x = -2		- 4	+ 8	− 14	+ 22
	2	- 4	+ 7	- 11	+20
	x^3	x^2	x	T.I.	

Con lo cual:

$$\text{Rpta.} \begin{cases} Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 11 \text{ (cociente)} \\ R(x) = 20 \text{ (Resto)} \end{cases}$$

Ejm. # 2 : Hallar "k" en la división:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + kx^2 + x + k}{x + 2}$$

Sabiendo que es exacta.

<u>Solución</u>

Como la división es exacta, el resto es un polinomio nulo, es decir:

$$\boxed{X+2=0} \rightarrow X=-2 \qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & +k & +1 & +k \\
X=-2 & & -2 & +8 & -2k-16 & 4k+30 \\ \hline
 & 1 & -4 & +(k+8) & +(-2k-15) & 0
\end{array}$$

Observemos que:

K + 4 k + 30 = 0 $\rightarrow$ $\boxed{k = -6}$ Rpta.

II.- Segundo caso : $\boxed{P(x) \div ax \pm b}$

Dividendo : P (x)

Divisor : $a\,x \pm b$

Esquema de Ruffini

$$\boxed{ax \pm b = 0} \rightarrow x = \mp\frac{b}{a} \qquad
\begin{array}{c|c|c}
 & \overbrace{\qquad\qquad}^{P(x)} & \\ \hline
 & \text{COCIENTE} & \text{Resto}
\end{array}$$

En este caso :

$$\begin{cases} Q(x) = \dfrac{\text{COCIENTE}}{a} \\ R(x) = \text{Resto} \end{cases}$$

Ejemplo # 1: Efectuar:

$$\frac{15x^3 - 4x^2 + 11x + 6}{5x+2}$$

Solución:

Por Ruffini, se tendría:

$$\boxed{5X+2=0} \rightarrow X=-2/5 \qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 15 & -4 & +11 & +6 \\
X=-2/5 & & -6 & +4 & -6 \\ \hline
 & \dfrac{15 \quad -10 \quad +15}{5} & & & 0
\end{array}$$

$$\begin{cases} Q(x) = 3x^2 - 2x + 3 \\ R(x) = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2: Determinar "k" en la división:

$$\frac{10x^4 + x^3 + 4x^2 - 5x + 2k}{2x+1}$$

sabiendo que el resto es: 3k – 2

Solución

Aplicando Ruffini, tendríamos:

$$\boxed{2X+1=0} \rightarrow X=-1/2 \qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 10 & +1 & +4 & -5 & +2k \\
X=-1/2 & & -5 & +2 & -3 & +4 \\ \hline
 & 10 & -4 & +6 & -8 & 3k-2
\end{array}$$

De la condición:

2k + 4 = 3 k – 2 $\rightarrow$ $\boxed{k = 6}$ Rpta.

4.7 CASOS ESPECIALES

01. Efectuar:

$$\frac{3x^{16} - 2x^{12} + 5x^4 - 7}{x^4 + 3}$$

Solución:

Haciendo la transformación: $x^4 = y$

Tendríamos: $\dfrac{3y^4 - 2y^3 + 5y - 7}{y+3}$

Por Ruffini:

$$\boxed{Y+3=0} \rightarrow Y=-3 \qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & -2 & +0 & +5 & -7 \\
Y=-3 & & -9 & +33 & -99 & +282 \\ \hline
 & \underbrace{3}_{y^3} & \underbrace{-11}_{y^2} & \underbrace{+33}_{y} & \underbrace{-94}_{\text{T.I.}} & +275
\end{array}$$

Obtenemos:

$$\begin{cases} Q(y) = 3y^3 - 11y^2 + 33y - 94 \\ R(y) = 275 \end{cases}$$

Como : $y = x^4$; en función de "x"

$$\begin{cases} Q(x) = 3x^{12} - 11x^8 + 33x^4 - 94 \\ R(x) = 275 \end{cases}$$

4.8 TEOREMA DEL RESTO

Este teorema es importante por que nos permite encontrar el resto de la división, sin efectuarla.

Enunciado.- El resto de dividir un polinomio racional P(x) entre un divisor binomio de la forma ($a\ x \pm b$) o cualquier otro divisor transformable a binomio; se obtiene al calcular el valor numérico de $P\left(\mp\frac{b}{a}\right)$

DEMOSTRACIÓN DE TEOREMA:
En concordancia con los elementos de la división, tenemos:

Dividendo : P(x)
Divisor : $a\ x \pm b$
Cociente : Q (x)
Resto : R (x) (incógnita)

De la identidad fundamental:

$$\boxed{D \equiv d\ Q + R}$$

Se tiene:
$P(x) = (a\ x \pm b)\ Q(x) + R(x)$

Evaluando P(x) para $X = \mp\frac{b}{a}$

Se obtiene:

$$P\left(\mp\frac{b}{a}\right) = \left[a\ \left(\mp\frac{b}{a}\right) \pm b\ \right] Q\left(\mp\frac{b}{a}\right) + R(x)$$

$$P\left(\mp\frac{b}{a}\right) = \left[\mp\frac{b}{a} \pm \frac{b}{a}\right] Q\left(\mp\frac{b}{a}\right) + R(x)$$

Como vemos $\mp\frac{b}{a} \pm \frac{b}{a} = 0$; con lo cual:

Resto = $R(x) = P\left(\mp\frac{b}{a}\right)$ L.q.q.d.

4.9 CASOS QUE SE PRESENTAN

Primer Caso: $\dfrac{P(x)}{ax \pm b}$

Reglas para determinar el Resto:
1º .- Divisor igual a cero : $a\ x \pm b = 0$
2º .- Hallamos el valor de x: $x = \mp\frac{b}{a}$
3º .- Reemplazamos el valor de "x" en el polinomio dividendo y el valor obtenido es el resto de la división

Ejemplo # 1:
Hallar el resto de la división:

$$\frac{2x^9 - 3x^5 + 5x^4 - 7x + 6}{x + 1}$$

Solución
Aplicando las reglas tendríamos:
1º.- Divisor = 0 → x + 1 = 0
2º.- Cálculo de x → x = -1
3º.- Reemplazando en el dividendo; x = -1, obtenemos:
Resto = $2(-1)^9 - 3(-1)^5 + 5(-1)^4 - 7(-1) + 6$
teniendo en cuenta que :

$\boxed{(-)^{\text{Par}} = +}$ $\wedge$ $\boxed{(-)^{\text{Impar}} = -}$

Resto = -2 + 3 + 5 + 7 + 6
$\boxed{\textbf{Resto = 19}}$ Rpta.

Ejemplo # 2.- Determine el valor de "k" en la división exacta.

$$\frac{2x^3 - (3k - 2)x^2 - x + 6k}{x + 2}$$

Solución
Como la división es exacta, el resto, es igual a cero y de acuerdo a las reglas del teorema del resto tendríamos:
1º.- Divisor = 0 → x + 2 = 0
2º.- Cálculo de x → x = -2
3º.- Resto = 0
$2(-2)^3 - (3k - 2)(-2)^2 - (-2) + 6k = 0$
$-16 - 12k + 8 + 2 + 6k = 0$
$-6k = 6$
∴ $\boxed{\mathbf{k = -1}}$ **Rpta.**

Segundo caso: $\dfrac{P(x)}{ax^n \pm b}$ **; (n ≥ 2)**

Reglas para determinar el resto:
1º.- Divisor = 0 → $ax^n \pm b = 0$
2º.- Cálculo de x^n → $x^n = \mp\frac{b}{a}$
3º.- Reemplazamos el valor de x^n en el polinomio dividendo y el valor obtenido es el resto de la división:

Ejemplo # 1:
Hallar el resto de la división:

$$\frac{x^5+2x^3-5x^2+3x-2}{x^2+2}$$

Solución:
Expresando el dividendo en función de "x^2" se tendría:

$$\frac{(x^2)^2x+2(x^2)x-5(x^2)+3x-2}{x^2+2}$$

Aplicando las reglas:
1º.- $x^2 + 2 = 0 \quad \rightarrow \; x^2 = -2$
2º.- Por consiguiente:
$R(x) = (-2)^2\, x + 2\,(-2)\, x - 5\,(-2) + 3\,x - 2$
$R\,(x) = 4\,x - 4\,x + 10 + 3\,x - 2$

$\therefore$ $\boxed{\mathbf{R\,(x) = 3\,x + 8}}$ Rpta.

Ejemplo # 2:
Si el resto de la división:

$$\frac{ax^7+3x^5+bx^2-5}{x^2+1}$$

es: x – 6. Hallar (a + b)

Solución
Expresando el dividendo en función de x^2, se tendría:

$$\frac{a(x^2)x+3(x^2)^2x+b(x^2)-5}{x^2+1}$$

Del teorema del resto:
1º.- $x^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = -1$
2º.- $R(x) = a\,(-1)^3\,x + 3\,(-1)^2\,x + b\,(-1) - 5$
$R\,(x) = (-a + 3)\,x - b - 5$
Como: $R(x) \equiv x - 6$
Se cumple que:
$(-a + 3)\,x - b - 5 \equiv x - 6$
Comparando los coeficientes:
i) $-a + 3 = 1 \quad \rightarrow \quad a = 2$
ii) $-b - 5 = -6 \quad \rightarrow \quad b = 1$
$\therefore$ $\boxed{a + b = 3}$ Rpta.

Ejemplo # 3:
Hallar el resto de la división:

$$\frac{2x^{23}-x^5+3}{x^2+x+1}$$

Solución
Siendo el divisor un trinomio hay que transformarlo a binomio, mediante la identidad

$$\boxed{(x^2 + x + 1)\,(x - 1) = x^3 - 1}$$

Con la cual, se tendría :

$$\frac{(2x^{23}-x^5+3)\;(x-1)}{(x^2+x+1)\;(x-1)}$$

$$\frac{2x^{24}-2x^{23}-x^6+x^5+3x-3}{x^3-1}$$

Expresando el dividendo en función de x^3:

$$\frac{2(x^3)^8-2(x^3)^7x^2-(x^3)^2+(x^3)x^2+3x-3}{x^3-1}$$

Recordemos que: si al dividendo y al divisor se multiplican por una misma cantidad, el cociente no se altera pero el resto queda afectado por la cantidad que se está multiplicando; en consecuencia:

Por el Teorema del resto:
1º.- $x^3 - 1 = 0 \quad \rightarrow \; x^3 = 1$
2º.- Con lo cual:
$(x - 1)\,R(x) = 2(1)^8 - 2(1)^7\,x^2 - (1)^2 + (1)\,x^2 + 3x - 3$
$(x - 1)\,R\,(x) = -x^2 + 3\,x - 2$

$$R\,(x) = \frac{-x^2 + 3\,x - 2}{x - 1}$$

Por la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rr|r}
 & -1 & +3 & -2 \\
x = 1 & & -1 & +2 \\
\hline
 & -1 & +2 & 0
\end{array}$$

Obtenemos:

Resto: $\boxed{R(x) = -x + 2}$ Rpta

COCIENTES NOTABLES FACTORIZACIÓN

COCIENTES NOTABLES

Son cocientes cuya forma general es:

$$\boxed{\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b}} \quad ; \quad n \in z^+$$

El desarrollo de estos cocientes se pueden efectuar directamente sin aplicar los criterios generales de la división algebraica

Todo cociente notable debe satisfacer los siguientes principios:

1º El resto de la división debe ser igual a cero.

2º Las bases deben ser iguales

3º Los exponentes deben ser iguales.

Nota.- C_oN_o = Cociente Notable

CASOS QUE SE PRESENTAN

Primer caso: $\frac{a^n - b^n}{a - b}$

n : Puede ser par o impar; siempre será C_o n_o ya que su resto es cero. El desarrollo obtenido por la regla de Ruffini es:

$$\boxed{\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}\, b + \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{n-1}}$$

Ejemplo:

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3$$

Segundo caso: $\frac{a^n + b^n}{a + b}$

n : En este caso debe ser impar necesariamente; para que el resto sea cero y el cociente sea notable.

El desarrollo obtenido por la regla de Ruffini es:

$$\boxed{\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}\, b +, - \ldots\ldots\ldots\ldots -, + b^{n-1}}$$

Ejemplo:

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4$$

Tercer caso: $\frac{a^n - b^n}{a + b}$

n : Para este caso debe ser un número par necesariamente, lo cual nos da un resto cero y por consiguiente el cociente es notable.

El desarrollo obtenido por la regla de Ruffini es:

$$\boxed{\frac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}\, b +, - \ldots\ldots\ldots +, - b^{n-1}}$$

Ejemplo:

$$\frac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - a^2 b + ab^2 - b^3$$

Cuarto caso: $\frac{a^n + b^n}{a - b}$

n : Ya sea par o impar, el resto no será cero, por consiguiente este tipo de cociente nunca será cociente notable.

PROPIEDADES GENERALES DE LOS COCIENTES NOTABLES

Respecto al C_oN_o cuya forma general es:

$$\boxed{\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b}}$$

Se satisfacen las siguientes propiedades:

1º El resto de la división debe ser igual a cero.

2º El número de términos que tiene en su desarrollo es igual al exponente del dividendo del cociente notable.

3º El desarrollo de un C_oN_o es un polinomio homogéneo cuyo grado es igual al exponente del dividendo del C_oN_o menos uno.

4º En el desarrollo de un C_oN_o los exponentes de la primera y segunda base varían consecutivamente en forma descendente y ascendente desde el mayor exponente, hasta el exponente cero.

5º Respecto a los signos de los términos del desarrollo de un C_oN_o, debemos considerar lo siguiente:

i) $\frac{-}{-}$ = +, +, + ... + (n: Par ó Impar)

ii) $\frac{+}{+}$ = +, -, +, ...-, + (n: Impar)

iii) $\frac{-}{+}$ = +, -, +, ...,+, - (n: par)

FORMULA PARA CALCULAR EL TÉRMINO DE LUGAR "K" EN EL DESARROLLO DE UN C_oN_o

En la expansión del C_oN_o:

$$\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b} = \underbrace{a^{n-1}}_{T_1} \pm \underbrace{a^{n-2}b}_{T_2} + \underbrace{a^{n-3}b^2}_{T_3} \pm .... \pm \underbrace{\quad}_{T_K} \underbrace{b^{n-1}}_{T_n}$$

Vemos que el término de lugar "k" adopta la forma matemática:

$$\boxed{T_K = \pm (a)^{n-k}\ (b)^{k-1}} \quad ; \quad 1 \le k \le n$$

Debemos tener en cuenta que:

"a" : Primera base del C_oN_o
"b" : Segunda base del C_oN_o
"n" : Número de términos de C_oN_o
"k" : Lugar que ocupa el término que queremos determinar

Además:

i) T_K, es (+) ⇔ k, es impar
ii) T_K, es (-) ⇔ k, es par, pero solo para C_oN_o de la forma : $\frac{+}{+}$ ó $\frac{-}{+}$
iii) T_K siempre es positivo para una C_oN_o de la forma $\frac{-}{-}$

Ejemplo#1:

Dado el C_oN_o : $\frac{a^{31}+b^{31}}{a+b}$

hallar el T_{27}

Solución:

Dado que 27 es un número impar:

$$\boxed{T_K = +\ (a)^{n-k}\ (b)^{k-1}}$$

Donde :
"a" = a
"b" = b
"n" = 31
"k" = 27

Remplazando:

$T_{27} = (a)^{31-27}\ (b)^{27-1}$

$\boxed{T_{27} = a^4\ b^{26}}$ **Rpta.**

 # 2: Dado el C_oN_o : $\frac{a^{43}-b^{43}}{a-b}$

hallar el G.A: del T_{32}

Solución:

Como el C_oN_o es de la forma $\frac{-}{-}$, todos los términos son positivos, por consiguiente:

$$\boxed{T_K = +\ (a)^{n-k}\ \ (b)^{k-1}}$$

Donde:
"a" = a
"b" = b
"n" = 43
"k" = 32
Remplazando:
$T_{32} = +(a)^{43-32}(b)^{32-1}$
$T_{32} = a^{11}\ b^{31}$

$\therefore$ $\boxed{\textbf{G.A: } = 11 + 31 = 42}$ **Rpta.**

DIVISIÓN DE LA FORMA

$$\frac{a^m \pm b^n}{a^p \pm b^q}$$

Este tipo de división será transformable a cociente notable, cuando satisfaga las siguientes condiciones

1.- El resto de la división debe ser igual a cero.
2.- Las bases deben ser iguales
3.- Los exponentes del dividendo con respecto al divisor deben ser proporcionales y pertenecer al campo de los números enteros positivos, es decir:

$$\boxed{\frac{m}{p} = \frac{n}{q}} \quad ; \quad \in z^+$$

4.- Respecto a los casos que se presentan en los C_oN_o, deben tenerse en cuenta lo siguiente:

a) Forma : $\frac{-}{-}$

$\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$ = # par o impar

b) Forma : $\frac{+}{+}$

$\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$ = # impar

c) Forma : $\frac{-}{+}$

$\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$ = # par

d) Forma : $\frac{+}{-}$ (no es C_oN_o)

5.- Un término cualquiera del desarrollo del C_oN_o

$$\frac{a^m \pm b^n}{a^p \pm b^q}$$

está formulado por:

$$\boxed{T_K = \pm (a)^{m-kp}\ (b)^{(k-1)q}} \ ; \ 1 \leq k \leq \frac{m}{p}$$

Ejemplo # 1:
Calcular "n" en el cociente:

$$\frac{x^{7n-4} - y^{8n-2}}{x^{n-2} + y^{n-1}}$$

Sabiendo que es notable.

Solución:
Por ser cociente notable, se cumple que:

$$\frac{7n-4}{n-2} = \frac{8n-2}{n-1}$$

Por proporciones:

$$(7n-4)(n-1) = (n-2)(8n-2)$$
$$7n^2 - 11n + 4 = 8n^2 - 18n + 4$$
$$-n^2 + 7n = 0$$

Factorizando:

$$n(n-7) = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ \text{ó} \\ \boxed{n = 7} \end{cases}$$

Rpta.

Ejemplo # 2:
Calcular (m+n) en el cociente notables:

$$\frac{x^m - y^{70}}{x^3 - y^n}$$

Si su desarrollo tiene 14 términos:

Solución:
Por ser cociente notable, se cumple que:

$$\frac{m}{3}=\frac{70}{n}=14 \rightarrow \begin{cases} \text{i) } \dfrac{m}{3}=14 \Rightarrow m=42 \\ \text{ii) } \dfrac{70}{n}=14 \Rightarrow n=5 \end{cases}$$

$\therefore$ $\boxed{m + n = 47}$ **Rpta.**

Ejemplo 3:

Dado el CoNo : $\dfrac{a^{93}+b^{124}}{a^3+b^4}$

hallar el grado absoluto del T_{22}.

Solución:

Como 22 es un número par, aplicamos la fórmula:

$$\boxed{T_K = -(a)^{n-k}\ (b)^{k-1}}$$

Donde:

"a" : Primera base = a^3

"b" : Segunda base = b^4

"n" : Número de términos = $\dfrac{93}{3}=\dfrac{124}{4}=31$

"k" : lugar que ocupa el término = 22

Reemplazando:

$T_{22} = -(a^3)^{31-22}\ (b^4)^{22-1}$

$T_{22} = -a^{27}\ b^{84} \rightarrow$ $\boxed{\text{G.A. } 111}$ **Rpta.**

OBSERVACIONES IMPORTANTES

Dado el CoNo : $\dfrac{a^n \pm b^n}{a \pm b}$

Podemos notar que:

1.- "n" representa el número de términos

2.- Si "n" es un número impar existe un término central al cual denotaremos por t_c y ocupa el lugar.

$$\boxed{t_c = t_{\frac{n+1}{2}}}$$

3.- Si "n" es un número par existen dos términos centrales y ocupan los lugares.

$$\boxed{t_{c1} = t_{\frac{n}{2}}} \quad \wedge \quad \boxed{t_{c1} = t_{\frac{n}{2}+1}}$$

4.- Si "k" es el lugar que ocupa el término del desarrollo de un CoNo y " k' " su término equidistante (término contado a partir del extremo final); se cumple.

a) $k + k' = n + 1$

b) $T_K = \pm (a)^{n-k} (b)^{k-1}$

c) $T_{K'} = t_{n+1-k} = \pm (a)^{k-1} (b)^{n-k}$

d) T_K y $T_{K'}$ son de igual signos en los CoNo de la forma : $\dfrac{-}{-}$ y $\dfrac{+}{+}$

e) T_K y $T_{K'}$ tienen signos diferentes para CoNo de la forma: $\dfrac{-}{+}$

RECONSTRUCCIÓN DE UN COCIENTE NOTABLE A PARTIR DE LOS TÉRMINOS DE SU DESARROLLO

Para reconstruir un cociente notable a partir de los términos de su desarrollo, debemos tener en cuenta las siguientes reglas:

1º Ley de signos

a) +, +, +, ... + $\rightarrow$ $\dfrac{-}{-}$

b) +, -, + ...-,+ $\rightarrow$ $\dfrac{+}{+}$

c) +, -, +, ...+, - $\rightarrow$ $\dfrac{-}{+}$

2º Ley de variables.- En el dividendo y en el divisor se escriben como bases del CoNo las bases de los términos extremos del desarrollo.

3º Variación de exponentes.- Nos determina los exponentes que deben colocarse en las bases del divisor; la variación descendente es para la primera base y la variación ascendente es para la segunda base.

4º formación del Cociente Notable.- Obtenidos los exponentes del divisor, estos se suman con los exponentes de los términos extremos del desarrollo del cociente notable y obtenemos los exponentes del dividendo, formándose el cociente notable.

Ejemplo:
Dado el desarrollo
$x^{145} + x^{140} y^8 + ...+ y^{232}$
formar el C_oN_o

Solución
De acuerdo a las reglas, tenemos:

1º.- Ley de Signos : $\dfrac{-}{-}$

2º.- Ley de variables: $\dfrac{x - y}{x - y}$

3º.- Variación de exponentes: $\dfrac{x - y}{x^5 - y^8}$

4º.- Formación del C_oN_o: $\dfrac{x^{150} - y^{240}}{x^5 - y^8}$

EJERCICIOS

Ejercicio Nº 1.- Dado el cociente notable

$$\frac{(x^2)^{3n+21} - (y^4)^{3n+6}}{x^{n+1} + y^{2n-3}}$$

determine el número de términos que tiene su desarrollo.

Solución

Por ser un cociente notable los exponentes deben ser proporcionales, es decir:

$$\#t = \frac{2(3n+21)}{n+1} = \frac{4(3n+6)}{2n-3}$$

operando, se tiene:
$(6n + 42)(2n - 3) = (12n + 24)(n + 1)$
$12 n^2 - 18 n + 84 n - 126 = 12 n^2 + 12 n + 24 n + 24$

Simplificando:

$66 n - 126 = 36 n + 24$
$30 n = 150$
$\boxed{n = 5}$

remplazando:

$$\#t = \frac{2[3(5)+21]}{5+1} \rightarrow \boxed{\#_t = 12}$$

Ejercicio Nº 2.- Al efectuar el desarrollo del C_oN_o: $\dfrac{x^{45} - x^{-30}}{x^3 - x^{-2}}$

Hallar el número de términos fraccionarios.

Solución:
Un término genérico del desarrollo de este C_oN_o es:

$$\boxed{T_K = (a)^{n-k}(b)^{k-1}} \rightarrow \begin{cases} a = x^3 \\ b = x^{-2} \\ n = 15 \\ k = k \end{cases}$$

Remplazando:
$T_K = (x^3)^{15-k} \quad (x^{-2})^{k-1}$
$T_K = x^{45-3k} \quad x^{-2k+2}$
$T_K = x^{47-5k}\ ; \quad 1 \leq K = 15$

Los términos serán fraccionarios;
Cuando: $47 - 5k < 0$
$-5k < -47$
$k > \dfrac{47}{5}$
$k > 9{,}4$

Dado que: $k \leq 15$; entonces:

$K = 10, 11, 12, 13, 14, 15$
∴el número de término fraccionarios es 6.

FACTORIZACIÓN

La factorización es un proceso contrario a la multiplicación, el cual no está sujeta a reglas específicas; su operación depende de la práctica adquirida. En esencia es la transformación de un polinomio en un producto indicado de factores primos, dentro de un determinado campo numérico.

Un polinomio está definido sobre un campo numérico, cuando los coeficientes de dichos polinomios pertenecen al conjunto numérico asociado a dicho campo. Hay tres campos de importancia:
Racional : Q ; Real : R; Complejo : C
Ejemplo:

i) $P(x) = 2x^2 - 7x + 3$, está definido en Q , R y C

ii) $Q(x) = \sqrt{2}\,x^5 + 3x - \sqrt{3}$, está definido en R y C, pero no en Q.

iii) $R(x) = x^3 - ix + 2i - 3$; esta definición solo en C .... $(i = \sqrt{-1})$

Factor ó Divisor.- Es un polinomio de grado distinto de cero que divide exactamente a otro.

Factor Primo.- Es un polinomio sobre un campo numérico el cual no se puede transformar en el producto de dos polinomios sobre el mismo campo numérico.

Ejemplo #1 .- $P(x) = x^2 - 25$
No es primo en Q, ni en R; ni en C, ya que se puede expresar como
$P(x) = (x + 5)(x - 5)$.

Ejemplo # 2.- $Z(x) = x^2 - 7$
Es primo en Q, pero no en R ni en C, dado que $Z(x) = (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$

Ejemplo # 3 .- $R(x) = x^2 + 16$
Es primo en Q y en R pero no es primo en C, ya que
$R(x) = (x + 4i)(x - 4i)$

Número de factores primos.- Es la cantidad de factores no repetidos que tiene el polinomio, dependiendo sobre que campo numérico se factorice.

Ejemplo

a) $P(x) = x^4 - 36 \equiv (x^2 + 6)(x^2 - 6)$
⇒ P (x) tiene 2 factores primos en Q

b) $P(x)=x^4 - 36 \equiv (x^2 + 6)(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$
⇒ P (x) tiene 3 factores primos en R

c) $P(x)=x^4 - 36 \equiv (x + i\sqrt{6})((x - i\sqrt{6})(x+\sqrt{6})(x - \sqrt{6})$
⇒ P (x) tiene 4 factores primos en C

FACTORIZACIÓN EN Q

I. Método del Factor Común.- El factor común está contenido en todos los términos de la expresión algebraica a factorizar, con el menor exponente; puede ser monómico o polinómico.

Ejemplo # 1: Factorizar:

$$f = 2x^4 y^3 + 2x^4 z^2 + 2x^4$$

Solución:
El factor común es: $2x^4$; de donde

$$\boxed{f = 2x^4 (y^3 + z^2 + 1)} \quad \textbf{Rpta.}$$

Ejemplo # 2: Factorizar:
$f = (a^2 + b)x + (a^2 + b)y + (a^2 + b)z$

Solución:
El factor común en este caso es: $(a^2 + b)$; de donde

$$\boxed{f = (a^2 + b)(x + y + z)} \quad \textbf{Rpta.}$$

II. Factorización por agrupación de términos

Consiste en agrupar convenientemente de forma que se tenga factor comunes polinómicos.

Ejemplo # 1: Factorizar

$$f = (a x + by)^2 + (ay - bx)^2$$

Solución:

Desarrollando por productos notables.

$f = a^2 x^2 + 2ab\, x\, y + b^2 y^2 + a^2 y^2 -$
$- 2\, ab\, xy + b^2 x^2$

Simplificando:

$f = a^2 x^2 + b^2 y^2 + a^2 y^2 + b^2 x^2$

agrupando el primero con el tercero y el segundo con el cuarto, se tiene:

$f = (a^2 x^2 + a^2 y^2) + (b^2 y^2 + b^2 x^2)$

$f = a^2 (x^2 + y^2) + b^2 (x^2 + y^2)$

$\boxed{\therefore \mathbf{f = (a^2 + b^2)\,(x^2 + y^2)}}$ **Rpta.**

III. Método de las Identidades

A. DIFERENCIA DE CUADRADOS

Para factorizar se extrae la raíz cuadrada de los cuadrados perfectos y se forman un producto de la suma de las raíces, multiplicadas por la diferencia de las mismas. En general.

$$f = a^{2m} - b^{2n} = (a^m + b^n)\,(a^m - b^n)$$

$$\begin{array}{cc} \sqrt{a^{2m}} \downarrow & \sqrt{b^{2n}} \downarrow \\ a^m & b^n \end{array}$$

B. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.- Su forma general es:

$$\boxed{f = a^{2m} \pm 2\, a^m\, b^n + b^{2n}}$$

$$\begin{array}{cccc} a^m & & b^n & \to a^m b^n \\ & \times & & \\ a^m & & b^n & \to a^m b^n \\ \hline & & & 2a^m b^n \end{array}$$

(Iguales)

$$\therefore\ \mathbf{f = (a^m \pm b^n)^2}$$

C. SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS.-

En este caso recordamos los productos notables.

$a^{3m} + b^{3n} = (a^m + b^n)\,(a^{2m} - a^m\, b^n + b^{2n})$

$a^{3m} - b^{3n} = (a^m - b^n)\,(a^{2m} + a^m\, b^n + b^{2n})$

Ejemplo # 1: Factorizar

$$f = x^8 - 81\, y^8$$

Solución

Extrayendo $\sqrt{\ }$ a los términos, se obtiene:

$$\begin{array}{lcc} & f = x^8 & -\ 81\, y^8 \\ & \sqrt{\ }\downarrow & \sqrt{\ }\downarrow \\ \text{suma} \longrightarrow & x^4 & 9y^4 \\ & \sqrt{\ }\downarrow & \sqrt{\ }\downarrow \\ \text{suma x Dif} \longrightarrow & X^2 & 3y^2 \end{array}$$

De donde:

$f = (x^4 + 9y^4)\,(x^2 + 3\, y^2)\,(x^2 - 3y^2)$

Ejemplo # 2.- Factorizar

$f = (a + b)^7 + c^3\, (a + b)^4 - c^4\, (a + b)^3 - c^7$

Solución:

Haciendo: $(a + b) = x$; se tendría:

$f = x^7 + c^3\, x^4 - c^4\, x^3 - c^7$

factorizando de 2 en 2

$f = x^4\, (x^3 + c^3) - c^4\, (x^3 + c^3)$

siendo el factor común : $x^3 + c^3$

$f = (x^3 + c^3)\,(x^4 - c^4)$

factorizando la suma de cubos y la diferencia de cuadrados, obtenemos finalmente:

$f = (x + c)\,(x^2 - xc + c^2)\,(x^2 + c^2)$
$(x + c)\,(x - c)$

Ejemplo # 3.- Factorizar:

$f = 3\, ab\, (a + b) + 3(a + b)^2\, c + 3(a + b)\, c^2$

Solución

Factorizando : $3\,(a + b)$; se tiene

$f = 3\,(a + b)\,[\, ab + c\,(a + b) + c^2]$

$f = 3\,(a + b)\,[ab + ac + bc + c^2]$

factorizando en el corchete "2" a "2"

$f = 3\,(a + b)\,[a\,(b + c) + c\,(b + c)]$

siendo: $(b + c)$ el factor común, se tendría como factores:

$\mathbf{f =} \boxed{\mathbf{3\,(a + b)\,(a + c)\,(b + c)}}$ **Rpta.**

MÉTODO DE LAS ASPAS

Aspa Simple.- Se aplica en expresiones trinomias de la forma.

$$\boxed{\mathbf{f = ax^{2m} + bx^{m}\, y^{n} + c\, y^{2n}}}$$

Se descomponen en factores los extremos y la suma de los productos en aspa debe ser igual al término central.
Es decir, dado :

$$f = ax^{2m} + bx^{m}\, y^{n} + c\, y^{2n}$$

$a_1\, x^m$ $\quad$ $c_1\, y^n \rightarrow a_2\, c_1$

$a_2\, x^m$ $\quad$ $c_2\, y^n \rightarrow \dfrac{a_1\, c_2}{b}$

Los factores se toman horizontalmente
$\therefore$ **$f = (a_1\, x^m + c_1\, y^n)\, (a_2\, x^m + c_2\, y^n)$**

Ejemplo # 1: factorizar
$f = 64\, a^{12}\, b^3 - 68\, a^8\, b^7 + 4\, a^4\, b^{11}$

Solución:
Siendo el factor común : $4\, a^4\, b^3$
Se obtiene:
$f = 4\, a^4\, b^3\, [16\, a^8 - 17\, a^4\, b^4 + b^8\,]$

Aplicando aspa simple al corchete

$16\, a^4$ $\quad$ $-b^4 \rightarrow a^4\, b^4$

a^4 $\quad$ $-b^4 \rightarrow \underline{16\, a^4\, b^4}$

$17\, a^4\, b^4$

$f = 4a^4\, b^3\, (\,16\, a^4 - b^4\,)\, (a^4 - b^4\,)$

factorizando las diferencias de cuadrados; obtenemos:
$f = 4\, a^4\, b^3\, (4\, a^2 + b^2)\, (2\, a + b)\, (2\, a - b)$
$(a^2 + b^2)\, (a + b)\, (a - b)$

EJERCICIOS

Factorizar:

1) $f = x^4 + y^4 + 2x\, y\, (x^2 + y^2) + 3x\, y^2$
Rpta. $f = (x^2 + xy + y^2)^2$

2) $g = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 1$
Rpta. $g = (x^3 + 3x^2 - 1)\, (x^3 - x^2 + 1)$

3) $f = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4\, (ab + cd)^2$
Rpta. $f = (a + b + c - d)\, (a + b - c + d)$
$(a - b + c + d)\, (a - b - c - d)$
$g = (x + y)^3 + 3xy\, (1 - x - y) - 1$
Rpta. $g = (x^2 + y^2 + 1 - xy + x + y)$

4) $f = (z^2 - y^2)^2\, (x^2 - a^2) + 4\, x^2\, y^2\, z^2$
Rpta. $f = (z^2\, x + xy^2 + az^2 - ay^2)$
$(z^2\, x + xy^2 - az^2 + ay^2)$

5) Un factor de: $a\, (a - 1) + a^3 - 1$ es:
Rpta. $(a - 1)\, (\, a + 1)^2$

6) Descomponer en factores: $x^5 + x + 1$
Rpta. $(x^2 + x + 1)\, (\, x^3 - x^2 + 1)$

7) Cuando se factoriza $x^9 - x$ hasta donde sea posible en polinomios y monomios con coeficientes enteros, el número de factores primos es: **Rpta. 5**

8) La expresión
$x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z$
Rpta. $(x + y - z)\, (x - y + z + 1)$

9) Hallar la suma de los factores primos de: $a\, (a^2 + ab - 1) - b\, (b^2 + ab - 1)$
Rpta. $3\, a + b$

10) Factorizar la expresión:
$x^4 + 2x^3 - 2x - 1$, indicar la suma de los factores primos: **Rpta. $2x$**

FACTORIZACIÓN – MCM / MCD
FRACCIONES ALGEBRAICAS

FACTORIZACIÓN POR DOBLE ASPA

Este método es aplicable para polinomios de la forma:

$f = a\,x^{2m} + bx^m y^n + c\,y^{2m} + dx^m +$
$\quad + e\,y^n + f$

El polinomio debe presentar cierto orden para poder factorizarlo.

1º. Debe tener 6 términos, si falta alguno de ellos, se reemplaza por ceros.

2º. Con respecto al primer trinomio los exponentes centrales deben ser la mitad de los extremos, y en el cuarto y quinto término se repiten los exponentes centrales.

FORMA DE FACTORIZAR

1. Estando ordenados los términos del polinomio, se trazan dos aspas de la siguiente forma:

$$f = (\underbrace{ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n}} + dx^m + ey^n + f$$

2. Descomponemos en factores los coeficientes de los términos extremos. Multiplicados en aspa y sumados deben verificar al "cuarto término".

$$f = \underbrace{ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n}} + dx^m + ey^n + f$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \times & f_1 \\ a_2 & & f_2 \end{array}$$

Deben cumplirse que: $a_1 f_2$

$$\frac{a_2 f_1}{d}$$

3. A continuación descomponemos en factores el coeficiente del tercer término. La primera aspa debe verificar al coeficiente del segundo término y la segunda aspa debe verificar el coeficiente del quinto término.

4. Los factores se obtienen tomando los términos de las aspas en forma horizontal.

En conclusión:

$f = ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n} + dx^m + ey^n + f$

$$\begin{array}{ccccc} a_1x^m & & c_1\,y^n & & f_1 \;\rightarrow\; a_2 f_1 \\ a_2x^m & \dfrac{a_1c_2 \;\; a_2c_1}{b} & c_2\,y^n & \dfrac{c_1f_2 \;\; c_2f_1}{e} & f_2 \;\rightarrow\; \underline{a_1 f_2} \\ & & & & d \end{array}$$

$\therefore$

$f = (a_1\,x^m + c_1\,y^n + f_1)\,(a_2\,x^m + c_2\,y^n + f_2)$

Ejemplo # 1: Factorizar

$f = 20\,x^4 - 21\,y^6 + 13\,x^2\,y^3 - 2x^2 +$
$\quad + 23\,y^3 - 6$

Solución

Ordenando el polinomio de acuerdo a las reglas dadas, se tiene:

$$f = \underbrace{20x^4 + 13x^2y^3 - 21y^6} - 2x^2 + 23y^3 - 6$$

$$\begin{array}{lcl} 4x^2 & & 2 \rightarrow 10 \\ 5x^2 & & 3 \rightarrow \underline{-12} \\ & & \quad -2 \end{array}$$

Dado que está verificado el cuarto término, descomponemos en factores el "tercer término"

$f = \underbrace{20x^4 + 13x^2y^3 - 21y^6} - 2x^2 + 23y^3 - 6$

$4x^2$		$-3\,y^3$		2	$\rightarrow\ 10$
	28 -15 13		9 14 23		
$5x^2$		$7\,y^3$		$-\,3$	$\rightarrow\ \underline{-12}$ $-\,2$

Como se han verificado todos los términos, los factores son:

$f = (4x^2 - 3y^2 + 2)\,(5x^2 + 7y^3 - 3)$

Ejemplo # 2.- Factorizar

$\mathbf{f = 12a^2 - 4b^2 - 12c^2 - 2ab + 7ac + 14\,bc}$

Solución:

Ordenando convenientemente, se tendría:

$f = \underbrace{12a^2 - 2ab - 4\,b^2} + 7ac + 14\,bc - 12\,c^3$

$3a$		$4c \rightarrow 16$
$4a$		$-3c \rightarrow \underline{-9}$ 7

Dado que el cuarto término está verificado, descomponemos en factores el tercer término.

$f = \underbrace{12a^2 - 2ab - 4b^2} + 7ac + 14\,bc - 12\,c^2$

$3a$		$-2b$		$4c$	$\rightarrow\ 16\,ac$
	6 $-\,8$ $-\,2$		6 8 14		
$4a$		$2b$		$-3c$	$\rightarrow \underline{-9\ ac}$ $7ac$

Como todos los términos están verificados, entonces:

$f = (3a - 2b + 4c)\,(4a + 2b - 3c)$

DOBLE ASPA: "CASO ESPECIAL" POLINOMIO DE CUARTO GRADO

El polinomio a factorizar debe tener cinco términos o en su defecto debe completarse con ceros, su forma canónica es:

$$f = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

El problema central consiste en descomponer cx^2 en dos términos, dispuestos en la siguiente forma:

$c_1\,x^2 \quad c_2\,x^2$ tal que : $c_1 + c_2 = c$

FORMA DE FACTORIZAR

1. Se decompone en factores los coeficientes de los términos extremos del polinomio de cuarto grado, de forma que :

   $a = a_1 \cdot a_2 \quad$ y $\quad e = e_1 \cdot e_2$

   multiplicando en aspa y sumando los productos respectivos, obtenemos "c_1", es decir:

   $f = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

   $c_2 \quad c_1$

a_1		e_1	$= a_2\ e_1$
a_2		e_2	$= \underline{a_1\ e_2}$ c_1

   Nota: "c_2" se obtiene por diferencia

   $c_2 = c - c_1$

2. "c_2" se descompone en factores

   $c_2 = c'_2 \cdot c''_2$, donde la primera aspa verifica a "b" y la segunda aspa verifica a "d"

   $f = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

   $c_2 \quad c_1$

$a_1\ x^2$		c'_2x		$e_1 \rightarrow a_2\ e_1$
$a_2\ x^2$	$a_1c''_2$ $a_2c'_2$ b	c''_2x	$c'_2\,e_2$ $c''_2\,e_1$ d	$e_2 \rightarrow \underline{a_1\ e_2}$ c_1

3. Los factores, se toman horizontalmente

$f = (a_1x^2 + c'_2x + e_1)\,(a_2x^2 + c''_2\,x + e_2)$

Ejemplo # 1: Factorizar
$f(x) = 20x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 19x - 15$

Solución:
Descomponiendo en factores los términos extremos, para determinar "c_1" se tendría:

$$f(x) = 20x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 19x - 15$$

$-6x^2 \quad -5x^2$

$4x^2 \qquad 3 = 15x^2$

$5x^2 \qquad -5 = \underline{-20x^2}$
$-5x^2$

Descomponiendo en factores:
$c_2 = -6x^2$ se tendría:

$$f = 20x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 19x - 15$$

$-6x^2 \quad -5x^2$

$4x^2 \quad -2x \qquad 3 = 15x^2$

$5x^2 \quad 3x \qquad -5 = \underline{-20x^2}$
$-5x^2$

$\therefore f(x) = (4x^2 - 2x + 3)(5x^2 + 3x - 5)$

OBSERVACIONES

1. No todos los polinomios de 4to. Grado se pueden factorizar por doble aspa.
2. Si el polinomio de 4to. Grado es factorizable por doble aspa, debe observarse si cada factor cuadrático es factorizable.
3. El trinomio : $ax^2 + bx + c = 0$ se puede factorizar, si su discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) es un cuadrado perfecto.

EJERCICIOS

Factorizar:

1. $f = 30a^2 - 6b^2 - 14c^2 - 28ab -$
$- 23ac + 25bc$
Rpta. $f = (5a - 3b + 2c)(6a + 2b - 7c)$

2. $g = 21x^2 - 37xy^2 + 12y^4 + 48x -$
$- 26y^2 + 12$
Rpta. $g = (3x - 4y^2 + 6)(7x - 3y^2 + 2)$

3. $f = 20x^2 + 12y^2 - 31xy + 2y - 2x - 4$
Rpta. $f = (5x - 4y + 2)(4x - 3y - 2)$

4. $g = 28a^2 + 6b^2 - 12c^2 - 29ab - 10ac + 14bc$
Rpta. $g = (4a - 3b + 2c)(7a - 2b - 6c)$

5. $f = 12x^2 - 29xy + 15y^2 + 24x - 40y$
Rpta. $f = (4x - 3y + 8)(3x - 5y)$

6. $g = 20x^4 + 9x^3 - 20x^2 + 21x - 6$
Rpta. $g = (4x^2 - 3x + 2)(5x^2 + 6x - 3)$

7. $f = 20x^4 + 7x^3 - 29x^2 + 23x - 21$
Rpta. $f = (5x^2 - 2x + 3)(4x^2 + 3x - 7)$

8. $g = 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$
Rpta. $g = (3x - 1)(x - 3)(2x - 1)(x - 2)$

9. $f = 20x^{4n} + 7x^{3n} - 19x^{2n} + 19x^n - 15$
Rpta. $f = (5x^{2n} - 2x^n + 3)(4x^{2n} + 3x^n - 5)$

10. $g = 120x^{4n} - 242x^{3n} + 27x^{2n} +$
$+ 135x^n - 54$
Rpta. $g = (3x^n - 2)(4x^n + 3)(5x^n - 3)(2x^n - 3)$

FACTORIZACIÓN POR DIVISORES BINOMIOS

Este método se basa en el criterio del teorema del resto:

i) Si: P (x) es divisible entre (x – a) entonces P(a) = 0

ii) Si: P(x) es divisible entre (x + b) entonces P (-b)= 0

Observando en forma inversa

i) Si: p (a)= 0; entonces un factor es (x –a)

ii) Si: p(-b) = 0; entonces un factor es (x + b)

CASO DE POLINOMIOS MÓNICOS

El polinomio mónico se caracteriza porque el coeficiente de su máxima potencia es igual a la unidad.

1. Se hallan todos los divisores del término independiente del polinomio P(x) a factorizar; los divisores se consideran con el signo más y menos.
2. Cada divisor con signo (+) o signo (-) se evalúa en P(x), si alguna de las evaluaciones vale cero, hemos encontrado un factor lineal.
3. Se recomienda encontrar una cantidad de ceros igual al grado del polinomio P(x) menos dos.
4. Los demás factores se encuentran aplicando la regla de Ruffini.

Ejemplo # 1

Factorizar :

$f(x) = x^4 – 2x^3 – 16\ x^2 + 2x + 15$

Solución:

Nótese que el polinomio es de cuarto grado, entonces:

1. La cantidad de ceros a encontrar por evaluación es: 4º - 2º = 2
2. Los divisores del término independiente "15" son ± (1, 3, 5, 15)
3. Evaluando:

a) f(1) = 1 – 2 – 16 + 2 + 15 = 0

entonces, un factor es : (x – 1)

b) $f(-1) = (-1)^4 -2(-1)^3 - 16(-1)^2 + 2(-1) + 15$

f (-1) = 0; entonces, otro factor lineal es: (x + 1)

4. Por la regla de Ruffini:

x – 1 = 0		– 2	– 16	+ 2	+ 15
X = 1		1	– 1	- 17	- 15
x + 1 = 0		1	– 17	- 15	0
X = -1		- 1	+ 2	+ 15	
	1	– 2	– 15	0	

∴ $P(x) = (x – 1)(x + 1)(x^2 – 2x – 15)$

El factor cuadrático es más fácil de factorizar, obteniéndose:

$P(x) = (x – 1)(x + 1)(x – 5)(x + 3)$

CASO DE POLINOMIOS NO MONICOS

Sea, P(x) el polinomio a factorizar:

1º Se hallan los divisores correspondientes al término independiente de P (x) y los divisores correspondientes al coeficiente de la máxima potencia.

2º Los divisores a evaluar son los divisores del término independiente más las fracciones que se obtienen al dividir los divisores del término independiente entre los divisores del coeficiente de la máxima potencia.

Ejemplo: Factorizar:

$f(x) = 6x^5 + 13x^4 - 29x^3 - 43x^2 - x + 6$

<u>Solución</u>

Como el polinomio es de grado 5 a lo más debemos encontrar "3" ceros.

Los divisores del primer coeficiente y del término independiente son:

$f(x) = 6x^5 + 13x^4 - 29x^3 - 43x^2 - x + 6$

$\pm(1, 2, 3, 6) \qquad \pm(1, 2, 3, 6)$

$\therefore$ los divisores a evaluar son:

$\pm\left(1, 2, 3, 6, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$

Evaluando:

1) $f(-1) = 6(-1)^5 + 13(-1)^4 - 29(-1)^3 - 43(-1)^2 - (-1) + 6$

$f(-1) = 0 \rightarrow$ Un factor es: $(x + 1)$

2) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^5 + 13\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 29\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 43\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 6$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow$ otro factor es: $\left(x + \frac{1}{2}\right)$

3) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^5 + 13\left(\frac{1}{3}\right)^4 - 29\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 43\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) + 6$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \rightarrow$ otro factor es $\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Aplicando Ruffini, se tendría:

	6	+ 13	- 29	- 43	- 1	+ 6
$x = -1$		- 6	- 7	+ 36	+ 7	- 6
	6	7	- 36	- 7	+ 6	0
$x = -\frac{1}{2}$		- 3	- 2	+ 19	- 6	
	6	+ 4	- 38	+ 12	0	
$x = \frac{1}{3}$		+ 2	+ 2	- 12		
	6	+ 6	- 36	0		

$\therefore f(x) = (x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(6x^2 + 6x - 36)$

Simplificando y factorizando el término cuadrático, se obtiene:

$f(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x - 1)(x + 3)(x - 2)$

EJERCICIOS

Factorizar:

01.
$F(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

02.
$G(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

03.
$F(x) = 72x^4 - 90x^3 - 5x^2 + 40x - 12$

04.
$G(x) = x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36$

05.
$F(x) = 6x^5 + 7x^4 - 15x^3 - 5x^2 + 9x - 2$

FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES RECÍPROCAS

Las expresiones recíprocas se caracterizan por que los términos de los términos equidistantes de los extremos son iguales. Debemos tener en cuenta lo siguiente:

1. Si la expresión es recíproca de grado impar, uno de sus factores es (x + 1) y este factor estará multiplicado por una expresión recíproca de grado par.
2. Si la expresión es recíproca de grado par los coeficientes equidistantes de los extremos son iguales y el último término es positivo.

Ejm: $P(x)= ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2 \pm bx + a$

FORMA DE FACTORIZAR

1. Se factoriza la variable que se encuentra elevado a un exponente igual a la mitad del grado de la expresión dada.
2. Se agrupan los términos equidistantes de los extremos quedando en cada grupo un término en "x" y su recíproco.
3. Se reemplaza el grupo de menor potencia por una letra diferente de "x" y las otras potencias se encuentran en función de esta letra.

Ejemplo: factorizar

$F(x) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6$

Solución

Dado que el grado de F(x) es 4, factorizamos: "x^2"; obteniendo:

$$F(x) = x^2 \left[6x^2 + 35x + 62 + \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2}\right]$$

Agrupando los términos equidistantes de los extremos:

$$F(x)= x^2 \left[6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 \right]$$

Haciendo : $x + \frac{1}{x} = a \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$

Con lo cual:

$F(x) = x^2 [6(a^2 - 2) + 35(a) + 62]$

$F(x) = x^2 [6a^2 + 35a + 50]$

Por aspa:

$$\begin{array}{ccl} 3a & & 10 \rightarrow 20a \\ 2a & & 5 \rightarrow \underline{15a} \\ & & \quad\;\; 35a \end{array}$$

$F(x) = x^2 [3a + 10][2a + 5]$

Como: $x + \frac{1}{x} = a$; se tendría:

$$F(x) = x^2 \left[3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10\right]\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right) + 5\right]$$

$F(x) = (3x^2 + 10x + 3)(2x^2 + 5x + 2)$

Nuevamente por aspa simple:

$F(x) = (3x + 1)(x + 3)(2x + 1)(x + 2)$

EJERCICIOS

Factorizar:

01. $F(x) = 4x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 12x + 4$

02. $G(x) = x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1$

03. $F(x) = 8x^6 - 36x^5 + 78x^4 - 99x^3 + 78x^2 - 36x + 8$

04. $G(x) = 6x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 6$

05. $F(x) = 27x^6 - 54x^5 + 117x^4 - 116x^3 + 117x^2 - 54x + 27$

06. $G(x) = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 5x + 3$

07. $F(x) = 12x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 45x^2 + 8x - 12$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)
MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

MCD.- El máximo común divisor de dos o más expresiones algebraicas es otra expresión algebraica entera de mayor coeficiente numérico y mayor grado que divide exactamente a cada una de ellas.

Ejemplo: Hallar el MCD de 36 y 24

Solución

Divisores de 36 **Divisores de 24**

1 2 3 4 6 12 18 36 1 2 3 4 6 8 12 24

MCD = 12

∴ **MCD (36, 24) = 12**

MCM.- De dos o más expresiones Algebraicas es otra expresión algebraica entera de menor coeficiente numérico y de menor grado que es divisible exactamente entre cada una de las expresiones dada.

Ejemplo

Múltiplos de 5:
5 10 15 20 25 30 60 120
Múltiplos de 6:
6 12 18 24 30 60 120
∴ MCM (5, 6) = 30

PROPIEDADES

1. Si dos o más expresiones son primos entre sí, es MCD es la unidad y su MCM el producto de ellas.
2. Dada dos expresiones algebraicas A y B, su M.C.D. por su M.C.M. es igual al producto de A por B.
3. M.C.D. (A, B) x M.C.M. (A, B) = A x B

M.C.D. y M.C.M. POR FACTORIZACIÓN

Para determinar el M.C.D. ó M.C.M. de dos o más expresiones algebraicas se aplican las siguientes reglas:

1. Se descomponen en sus factores primos cada una de las expresiones dadas.
2. El M.C.D está determinado por el producto de los factores comunes con sus menores exponentes.
3. El M.C.M. está determinado por el producto de los factores comunes y no comunes con sus mayores exponentes.

Ejemplo: Hallar el M.C.D. y M.C.M. para las siguientes expresiones algebraicas:
$A = (x^2 - y^2)^2$; $B = x^4 - y^4$; $C = (x^2 + y^2)^2$

Solución

Factorizando cada una de las expresiones algebraicas

$A = (x + y)^2 (x - y)^2$
$B = (x^2 + y^2) (x + y) (x - y)$
$C = (x^2 + y^2)^2$

$$\therefore \begin{cases} M.C.D. = 1 \\ M.C.M = (x^2 + y^2)^2 (x + y)^2 (x - y)^2 \end{cases}$$

EJERCICIOS

01. Hallar el M.C.D. de los polinomios
$A = x^4 - 3x^3 - 10 x^2 + 7 x - 1$
$B = x^4 - 8x^3 + 17 x^2 - 8x + 1$
$C = x^3 - 6x^2 + 6 x - 1$
Rpta. M.C.D. $= x^2 - 5X + 1$

02. Hallar el M.C.M. de:
$A = x^3 + 5x^2 + 8 x + 4$
$B = x^3 + 3x^2 - 4$
$C = x^3 + 6x^2 + 12 x + 8$

Rpta.
M.C.M. = $(x + 2)^3 (x + 1) (x - 1$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Las fracciones algebraicas, son todas aquellas donde por lo menos hay una letra en el denominador.

Ejemplo: a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{x+y}$ c) $\frac{x+y}{x^2+y^2}$

Signos de una fracción.- son tres, el signo del numerador, el signo del denominador, el signo de la fracción propiamente dicha. Así tenemos:

i) $\frac{a}{b} = +\frac{+a}{+b} = +\frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{+b} = -\frac{+a}{-b}$

ii) $\frac{-a}{b} = -\frac{-a}{-b} = +\frac{+a}{.-b} = +\frac{-a}{+b}$

2.

CLASES DE FRACCIONES

A . Fracciones propias.- Se llama así cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador (Nº < Dº). Ejemplos:

a) $\frac{x+2}{x^3-x+1}$ b) $\frac{x^2-x+2}{x^7+x+3}$

B. Fracciones impropias.- En este caso el grado del numerador es mayor que el grado del denominador (Nº > Dº). Ejemplos:

a) $\frac{x^5-x-2}{x^3+x+1}$ b) $\frac{x^2-x+2}{x-3}$

C. Fracciones homogéneas.- Son aquellas fracciones que tienen iguales denominadores.

Ejemplos:

a) $\frac{2}{x^2+1}$; $\frac{-x}{x^2+1}$; $\frac{2x-3}{x^2+1}$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

1. Cuando se trata de una sola fracción, se factorizan los miembros de la fracción y se cancelan los factores comunes.

Ejm: Simplificar

$F = \frac{a^2-b^2}{a+b} \rightarrow F = \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)}$

$\therefore$ **F = a- b**

Cuando es una suma o resta de fracciones; primero se simplifican las fracciones y luego hallamos el M.C.M. Se efectúan las operaciones indicadas y se simplifica la fracción obtenida.
En multiplicación de fracciones se factorizan los miembros de las fracciones y luego se multiplican entre sí.
Para el caso de división de fracciones, se invierte la fracción que actúa como divisor y se procede como en el caso de la multiplicación.

Ejemplo # 1:
Simplificar la fracción:

$$E = \frac{\frac{x+2}{x-2}+2}{\frac{x+2}{x-2}-2}$$

Solución:
Observamos que el M.C.M. es (x – 2) con lo cual la expresión quedaría de la siguiente forma:

$$E = \frac{x+2+2x-4}{x+2-2x+4}$$

Simplificando:

$$E = \frac{3x-2}{-x+6}$$ **Rpta.**

EJERCICIOS

01. **Si :** $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ **; calcular**

$$E = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{ax + by + cz}$$

Rpta. E = 0

02. Simplificar:

$$E = \frac{(x+1)(x^2-9)(x-5)+27}{(x+2)(x^2-16)(x-6)+48}$$

Rpta. E = $\frac{x^2-2x-6}{x^2-2x-20}$

03. Simplificar:

$$E = \frac{x^3 + (2a+b)x^2 + (a^2+2ab)x + a^2b}{x^3 + (a+2b)x^2 + (b^2+2ab)x + ab^2}$$

Rpta. E = $\frac{x+a}{x+b}$

04. Si:

a + b + c = 0; calcular:

$$E = \frac{a^9 + b^9 + c^9 - 3a^3 b^3 c^3}{9\,a\,b\,c}$$

Rpta. $(b^2 + bc + c^2)^3$

05. Si el numerador y el denominador de la fracción reductible:

$$\frac{3x^3 - 2x^2 - (a+2)x - 6}{3x^3 - 5x^2 - (a-1)x + b}$$

Admite un divisor común de la forma: $(x^2 + mx - 6)$. Indicar su equivalente irreductible.

Rpta. $\frac{3x+1}{3x-2}$

CANTIDADES IMAGINARIAS NÚMEROS COMPLEJOS

7.1 CANTIDADES IMAGINARIAS

Las cantidades imaginarias se originan al extraer raíces indicadas de índice par a números negativos.

Ejm: $\sqrt{-16}$; $\sqrt[4]{-25}$; $\sqrt[2n]{-N}$

Son cantidades imaginarias.

Unidad Imaginaria.- Está representada por la letra i, el cual matemáticamente nos representa a $\sqrt{-1}$; es decir:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}\text{; tal que } i^2 = -1}$$

Nota.- Si queremos efectuar:

E = $\sqrt{-3}\ .\ \sqrt{-12}$, debemos hacerlo con bastante cuidado. Es decir::

E = $\sqrt{3}\ .\ \sqrt{-1}\ .\ \sqrt{12}\ \sqrt{-1}$

E = $\sqrt{3}\ i\ \sqrt{12}\ i$

E = $\sqrt{36}\ i^2$

Como: $\sqrt{36} = 6 \wedge i^2 = -1$, se tendría

$\therefore$ $\boxed{E = -6}$ Rpta.

7.2 POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Dado que: $i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$\boxed{i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1}$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

$i^7 = -i$

$\boxed{i^8 = 1}$

Vemos que las potencias de la unidad imaginaria, se repiten en período de 4 en 4 y cuyos valores son $\{i ; -1; -i; 1\}$

7.3 POTENCIAS POSITIVAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Siendo; 4K: múltiplo de cuatro vemos que:

a) $\boxed{i^{4k} = 1}$

b) $i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i$

c) $i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1$

d) $i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i$

Regla.- La unidad imaginaria elevado a un exponente múltiplo de cuatro; su resultado es igual a la unidad.

7.4 POTENCIAS NEGATIVAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Siendo; 4k: múltiplo de cuatro se observa que:

a) $\boxed{i^{-4k} = 1}$

b) $i^{-(4k-1)} = i^{-4k} \cdot i = i$

c) $i^{-(4k-2)} = i^{-4k} \cdot i^2 = -1$

d) $i^{-(4k-3)} = i^{-4k} \cdot i^3 = -i$

Regla.- Cuando "i" está elevada a una potencia negativa, si el exponente es múltiplo de cuatro, el resultado es igual a la unidad.

Es importante recordar lo siguiente:

Desde que: 4k = múltiplo de 4

1. $(4k)^n = 4k$
2. $(4k + 1)^n = 4k + 1$; (n = par o impar)
3. $(4k + 2)^n = 4k$; (para $n \geq 2$)
4. $(4k + 3)^n = 4k + 1$; (para $n \geq 2$)

7.5 **EJERCICIOS RESUELTOS**

01. Hallar: i^{26}

Solución:

Recordemos que un número es múltiplo de cuatro, cuando sus dos últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de cuatro, es decir:

00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, 28
32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60
64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92
96.

De donde:

$\boxed{i^{26} = i^{24+2} = i^2 = -1}$ **(Rpta.)**

02. Determinar : i^{264239}

Solución:

Considerando las dos últimas cifra, vemos que:

$i^{264239} = i^{39} = i^{36+3} = i^3 = -i$

03. Calcular: $E = i^{-793}$

Solución:

Observando solo las dos últimas cifras:

$i^{-793} = i^{-93} = i^{-96+3} = i^3 = -i$

04. Hallar : $E = i^{-2937722649}$

Solución:

Considerando solo las dos últimas cifras

$E = i^{-49} = i^{-52+3} = i^3 = -i$

05. Simplificar

$$R = \frac{i^{93} + i^{75} + i^{63} + i^{49}}{i^{-72} + i^{-93}}$$

Solución:

Efectuando las potencias indicadas

$$E = \frac{i + i^3 + i^3 + i}{1 + i^3}$$

De donde:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{i - i - i + i}}{\mathbf{1 - i}} = 0$$

06. Hallar el valor simplificado de:

$$E = i^{21^{23^{25^{29}}}}$$

Solución:

En este tipo de problemas se trabaja con las dos primeras potencias.

$E = i^{21^{23}}$; donde: $\begin{cases} 21 = 4k + 1 \\ 23 = \#\text{ Impar} \end{cases}$

Con lo cual:

$E = i^{(4k+1)^{\text{Impar}}} = i^{4k+1}$

$\therefore \boxed{\mathbf{E = i}}$ **Rpta.**

07. Calcular : $S = i^{98^{38^{45^{61}}}}$

Solución

Trabajando con los dos primeros exponentes:

$E = i^{98^{38}}$; donde: $\begin{cases} 98 = 4k + 2 \\ 38 = \#\text{ par} \end{cases}$

De donde:

$S = i^{(4k+2)^{\text{Par}}} = i^{4k}$

$\therefore \boxed{\mathbf{S = 1}}$ **Rpta.**

08. Determinar el valor de la sumatoria

$S = i^2 + 2i^4 + 3i^6 + 4i^8 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2n - 1)\, i^{4n-2} + 2n\, i^{4n}$

Solución:

Se observa que hay "2n" términos, la cual está señalada por los coeficientes. Determinando las potencias de "i":

$S = (-1) + 2(1) + 3(-1) + 4(1) + \ldots\ldots + (2n - 1)(-1) + (2n)(1)$

Agrupando de "2" en "2", donde cada grupo vale 1; se tiene:

$$S = \underbrace{1 + 1 + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1}_{n \text{ veces}}$$

$\boxed{\mathbf{S = n}}$ **Rpta.**

7.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Calcular el valor de:

$$E = \left[\left[\left[i^{2} \right]^{3} \right]^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} \right]^{219}$$

Rpta. 1

02. Hallar el valor de:

$$S = \frac{i^{999} + i^{888} + i^{777}}{i^{666} + i^{555} + i^{444}}$$

Rpta. i

03. El valor de:

$i^2 + 3i^4 + 5i^6 + 7i^8 + \ldots. + (2n - 1)\, i^{2n}$

es : **n** **Rpta.**

04. El valor de:

$E = i^{-6349} + i^{-2715} - i^{-1693}$

es : **Rpta. – i**

05. Calcular el valor de:

$$R = \frac{i^{-932} - i^{-217} - i^{-964}}{-i^{-522} - i^{-261} - i^{-393}}$$

es : **Rpta. 0,5**

06. Calcular el valor de:

$$R = \left[i^{2} + i^{2^{2}} + i^{2^{3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + i^{2^{27}} \right]^{0,5}$$

es : **Rpta. 5**

07. Hallar el valor de:

$$E = i^{-26^{31^{42^{63}}}}$$

es : **Rpta. 1**

7.7 NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos son expresiones matemáticas formadas por una parte real y una parte imaginaria. El complejo se representa por:

$$\boxed{Z = a + b\ i}$$

Donde i; es la unidad de los números imaginarios y se tiene que:

$$\begin{cases} \text{Parte real} & : \ R_e\ \{ Z \} = a \\ \text{Parte imaginaria} & : \ I_m\ \{ Z \} = b \end{cases}$$

Esto nos indica que el complejo Z está formado por "a" unidades reales y "b" unidades imaginarias.

Con respecto al número complejo.

$$\boxed{Z = a + b\,i}$$

a) Si; $a = 0 \rightarrow Z = bi$ (# imaginario puro)

b) Si; $b = 0 \rightarrow Z = a$ (# real)

c) Si; $a = 0 \wedge b = 0 \rightarrow Z = 0$ (Complejo nulo)

7.8 CLASES DE COMPLEJOS

A. **Complejos conjugados.-** Dos números complejos son conjugados cuando tienen igual parte real y en la parte imaginaria solo se diferencian en el signo.

Así tenemos; El complejo de:

a) $Z_1 = 7 - 2i$ es: $Z_2 = 7 + 2i$

b) $Z_1 = -5 - 3i$ es: $Z_2 = -5 + 3i$

c) $Z_1 = 8 - \sqrt{3}\,i$ es: $Z_2 = 8 + \sqrt{\mathbf{3}}\ i$

En general, el complejo de:

$$\boxed{Z_1 = a + b\,i \quad \text{es :} \quad Z_2 = a - b\,i}$$

a. Complejo Iguales.- Dos números complejos son iguales, si tienen igual parte real e igual parte imaginaria. Es decir**:**

$Z_1 = a + b\,i$ es igual a $Z_2 = c + d\,i$
$\Leftrightarrow \quad a = c \quad \wedge \quad b = d$

B. Complejos Nulos.- Son aquellos números complejos que tienen parte real nula y parte imaginaria nula, es decir**:**

$$\boxed{Z = a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0}$$

C. **Complejos opuestos.-** Son aquellos números complejos que se diferencian solo en los signos, tanto para la parte real, como para la parte imaginaria, es decir:

$Z_1 = a + b\,i$ es opuesto a $Z_2 = c + d\,i$
$\Leftrightarrow \quad a = -c \quad \wedge \quad b = -d$

7.9 EJERCICIOS RESUELTOS

01. Si los complejos:

$Z_1 = a + 2i$ y $Z_2 = (2a - 1) + (3b + 2)\,i$

Son conjugados. Hallar el valor de $(a^2 + b^2)$

Solución

Dado que son complejos conjugados; sus partes reales son iguales, es decir:

$a = 2a - 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{a = 1}$

De otro lado, sus partes imaginarias, solo se diferencian en el signo:

$2 = -(3b + 2) \rightarrow 4 = -3b$

$$\boxed{\therefore\ b = -\frac{4}{3}}$$

reemplazando en :

$E = a^2 + b^2 \rightarrow E = (1)^2 + (-\frac{4}{3})^2$

$$\boxed{\therefore\ \mathbf{E} = \frac{25}{9}}$$ **Rpta. D**

02. Cuál es el valor de : $b^c + c^{-b}$ si los complejos:

$Z_1 = (b - 3) - (c + 2)\,i$

y

$Z_2 = 6 - (b - 1)\,i$

Son opuestos

Solución:

Como los números complejos son opuestos, estos se diferencian en el signo, tanto para la parte real, como para la parte imaginaria, es decir:

a) $b - 3 = -6 \rightarrow \quad \boxed{b = -3}$

b) $-(c + 2) = b - 1 \rightarrow -c - 2 = -3 - 1$

$\boxed{c = 2}$

$\therefore\ b^c + c^{-b} = (-3)^2 + (2)^3 = 17$

$\boxed{b^c + c^{-b} = 17}$ Rpta.

03. Calcular (a + b), si

$a - bi = (2 - 3\,i)^2$

Solución

Desarrollando el segundo miembro de la igualdad por productos notables.

$a - b\,i = 4 - 12\,i + 9\,i^2$

dado que: $i^2 = -1$; entonces:

$$a - bi = -5 - 12\,i \quad \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 12 \end{cases}$$

$\therefore \boxed{\mathbf{(a + b) = -5 + 12 = 7}}$ **Rpta.**

7.10 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

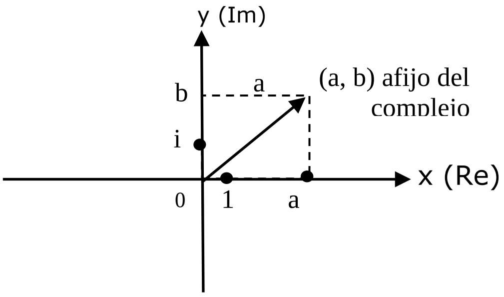
Forma Geométrica o Cartesiana.- **Todo número complejo de la forma :**

Z = a + bi se puede representan en el plano cartesiano. Debe tenerse en cuenta que:

$$Z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = a \\ \text{Im}(z) = b \end{cases}$$

Esto quiere decir que en el eje de las abscisas, tenemos: "a" unidades reales y en el eje de las ordenadas, tenemos "b" unidades imaginarias.
En efecto; la gráfica de:

$\boxed{Z = a + bi}$; es:



COORDENADAS CARTESIANAS

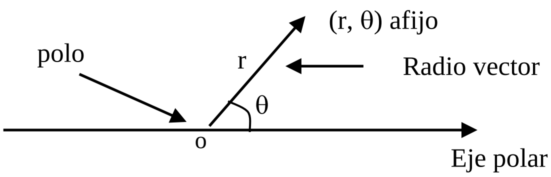
Coana

Afijo de un complejo.- Es un punto del plano complejo, el cual está determinado por un par ordenado (a, b)
a = Re (z) : nos representa la parte real
b = Im (z) : nos representa la parte imaginaria

Ejemplos:

# Complejo	Afijo del # complejo
$Z_1 = 3 + 5i$	(3; 5)
$Z_2 = -2 - 2i$	(-2; -2)
$Z_3 = -6 + 8i$	(-6; 8)
$Z_4 = 7 - \sqrt{2}\,i$	$(7; -\sqrt{2})$

Forma Polar.- Este sistema determina el afijo de un número complejo mediante dos coordenadas polares, una de las coordenadas es el radio vector "r" que es la distancia del afijo (r, θ) al polo y la otra coordenada es el argumento "θ", llamado también ángulo polar, que está determinado por el eje polar y el radio vector, como muestra la gráfica adjunta.

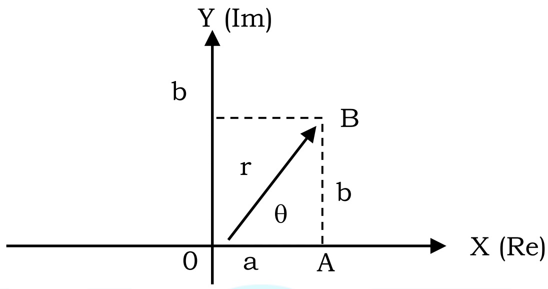


COORDENADAS POLARES

7.11 RELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y LAS COORDENADAS POLARES

Haciendo coincidir el polo del eje polar con el origen de coordenadas, obtenemos la gráfica del complejo.

$Z = a + bi$ (En la forma cartesiana)
$Z = r \underline{|\theta}$ (En la forma polar)



PLANO GAUSSIANO

Para hacer las transformaciones entre coordenadas, consideramos:

I.- Transformación de la forma cartesiana a la forma polar.
Dato : $Z = a + b\,i$
Incog: $Z = r \underline{|\theta} = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

En el plano Gaussiano por Pitágoras:
Y en el ΔR OAB, observamos que:

$r^2 = a^2 + b^2 \rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$r = |z|$ es el módulo del # complejo
asimismo:
$\operatorname{Tg}\theta = \frac{b}{a} \rightarrow \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$; $-180° \leq \theta \leq 180°$
θ : es el argumento del # complejo.

II. Transformación de la forma polar a la forma cartesiana

Dato : $Z = r \underline{|\theta} = r\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$
Incog: $Z = a + b\,i$

Con referencia al plano Gaussiano

"a" es la proyección de "r" sobre el eje de las abscisas:

$$a = r\cos\theta$$

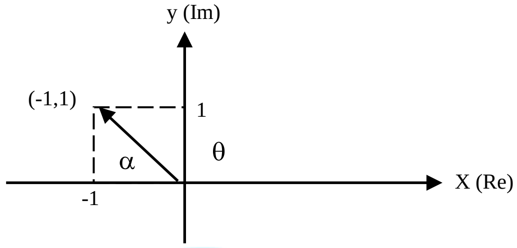
"b" es la proyección de "r" sobre el eje de las ordenadas

$$b = r\,\text{sen}\,\theta$$

Ejemplo # 1: Representar el complejo Z = -1 + i en la forma polar

Solución:

Representando z = -1 + i en el plano complejo:



Vemos que:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$\theta = 180º - \alpha$; donde $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{1} = 1$

$$\alpha = 45º$$

$\theta = 180º - 45º = 135º$

Con lo cual :

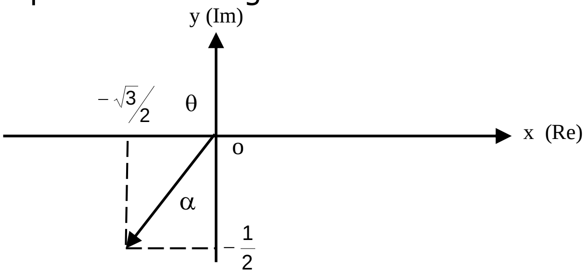
$\boxed{z = -1 + i = \sqrt{2}\ \underline{|135º}}$ Rpta.

Ejemplo. # 2. Represente el número complejo

$Z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ en la forma polar.

Solución:

Graficando $Z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ en el plano complejo, con la finalidad de ubicar la posición del argumento.



Vemos que:

$$r = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = 1$$

Asimismo:

$\theta = 270º - \alpha$; donde $\alpha = \text{arctg}\,\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}$

$$\alpha = 60º$$

$\theta = 270º - 60º = 210º$

$\therefore$ $\boxed{z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1}\ \underline{|210º}}$ Rpta.

Ejemplo # 3. Exprese en la forma cartesiana el número complejo

$Z = 2\ \underline{|120º}$

Solución:

Teniendo en cuenta que:

$Z = r\,\underline{|\ \theta\ } = r\cos\theta + i\,r\,\text{sen}\,\theta$

Se tendría:

$Z = 2\cos 120º + i\,2\,\text{sen}\,120º$

Reduciendo al primer cuadrante

$Z = -2\cos 60º + i\,2\,\text{sen}\,60º$

$$Z = -2\left(\frac{1}{2}\right) + i\,2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$Z = -1 + i\sqrt{3}$

$\therefore$ $\boxed{\mathbf{z = 2\ \underline{|120º}\ = -1 + i\sqrt{3}}}$ **Rpta.**

7.12 EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Representar en la forma polar los siguientes números complejos:

a) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ Rpta: $z = 1\ \underline{|300º}$

b) $z = 1 - i$ Rpta: $z = \sqrt{2}\ \underline{|-45º}$

c) $z = -1 + i\sqrt{3}$ Rpta: $z = 2\ \underline{|120º}$

d) $z = -5\sqrt{3} - i\,5$ Rpta: $z = 10\ \underline{|210º}$

e) $z = 3\sqrt{2} - i\,3\sqrt{2}$ Rpta: $z = 6\ \underline{|315º}$

B) Representar en la forma cartesiana los siguientes números complejos:

a) $z = 10\lfloor -60^\circ$ Rpta. $z = 5 - i\,5\sqrt{3}$

b) $z = 6\lfloor -135^\circ$ Rpta. $z = -3\sqrt{2} - i\,3\sqrt{2}$

c) $z = 2\lfloor 120^\circ$ Rpta. $z = -1 + i\sqrt{3}$

d) $z = 50\lfloor 315^\circ$ Rpta. $z = -25\sqrt{2} - i\,25\sqrt{2}$

e) $z = 12\lfloor -120^\circ$ Rpta. $z = -6 - i\,6\sqrt{3}$

7.13 OTRAS FORMAS DE REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO COMPLETO

El número complejo $z = a + bi$ se puede representar en las siguientes formas:

1. Forma Cartesiana
   $Z = a + b\,i$
2. Forma trigonométrica
   $Z = r\cos\theta + i\,r\,\text{sen}\,\theta$
3. Forma polar
   $Z = r\lfloor \theta = r\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$
4. Forma exponencial
   $Z = r\,e^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$
5. Forma sintética
   $Z = r\ \text{Cis}\,(\theta) = r\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

Considerar que para todas las formas:

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |Z|$:módulo del complejo

$\theta = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}$: Argumento del complejo.

$-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

7.14 OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

1. SUMA ALGEBRAICA.- Para sumar o restar complejos, se suman o restan las partes reales y las partes imaginarias entre sí. En efecto:

Si; $Z_1 = a + b\,i$ y $Z_2 = c + d\,i$

Entonces:

a) $Z_1 + Z_2 = a + bi + c + d\,i$

$Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)\,i$

b) $Z_1 - Z_2 = a + b\,i - (c + d\,i)$

$Z_1 - Z_2 = (a - c) + (b - d)\,i$

2. MULTIPLICACIÓN DE COMPLEJOS.

a) En la forma cartesiana se procede como si fuera el producto de dos binomios; es decir:

Si; $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + d\,i$

$\Rightarrow Z_1\,Z_2 = (a + b\,i)\,(c + d\,i)$

$Z_1\,Z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$

b) En la forma polar; primero se hace la transformación de la forma cartesiana a polar; es decir, dados:

i) $Z_1 = a + b\,i = r_1\lfloor \theta_1$, donde

$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \wedge \theta_1 = \text{arc tg}\,\frac{b}{a}$

ii) $Z_2 = c + d\,i = r_2\lfloor \theta_2$, donde

$r_2 = \sqrt{c^2 + d^2} \wedge \theta_2 = \text{arc tg}\,\frac{d}{c}$

vemos que :

$$\boxed{Z_1\,Z_2 = (r_1\lfloor \theta_1)\,(r_2\lfloor \theta_2) = r_1\,r_2\lfloor \theta_1 + \theta_2}$$

Observaciones:

1. *El módulo del producto es igual al producto de los módulos de los factores:*
2. *El argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores.*

3. DIVISIÓN DE COMPLEJOS.-

a) En la forma cartesiana; para dividir dos complejos, se multiplica y divide por la conjugada del divisor. Es decir:

Dados; $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + d\,i$

Se tiene:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{a + b\,i}{c + d\,i}\right)\left(\frac{c - d\,i}{c - d\,i}\right) = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\,i}{c^2 + d^2}$$

En una división de complejos, se debe tener en cuenta lo siguiente:

i) $Z = \dfrac{a+bi}{c+di}$; es un número real, si: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

ii) $Z = \dfrac{a+bi}{c+di}$; es imaginario puro, si: $\dfrac{a}{d} = -\dfrac{b}{c}$

b) En la forma polar.- Primero se hace la transformación de cartesiano a polar; es decir:

$Z_1 = a + b\,i \;= r_1 \lfloor \theta_1$

$Z_2 = c + d\,i \;= r_2 \lfloor \theta_2$

Entonces:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \lfloor \theta_1}{r_2 \lfloor \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \lfloor \theta_1 - \theta_2}$$

OBSERVACIONES

1. *El módulo del cociente, es igual al cociente de los módulos del dividendo y divisor.*

2. *El argumento del cociente, es igual a la diferencia del argumento del dividendo y divisor.*

4. POTENCIACIÓN DE UN COMPLEJO.- Para el caso de la potencia de un complejo se puede utilizar el binomio de Newton o la fórmula de DE MOIVRE, la cual veremos a continuación:

Dado; $z = a + b\,i$; al transformar a polar se obtiene:

$$\boxed{z = r \lfloor \theta}$$

Donde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ “Módulo”

$\theta = \text{arc tg}\,\dfrac{b}{a}$; $-180^o \le \theta \le 180^o$ (arg.)

$$\boxed{\begin{aligned} z^n &= (r \lfloor \theta)^n = r^n \lfloor n\theta \\ z^n &= r^n [\cos n\theta + i \,\text{sen}\, n\theta] \end{aligned}}$$

OBSERVACIONES

1. *El módulo de la potencia es igual al módulo de la base a la potencia deseada.*

2. *El argumento de la potencia es igual al argumento de la base por el exponente de la potencia.*

5. RADICACIÓN DE UN COMPLEJO.- Para extraer la raíz de un complejo se utiliza la fórmula de DE MOIVRE.

Dado : $Z = a + bi = r \lfloor \theta$, se tiene para la raíz n-ésima

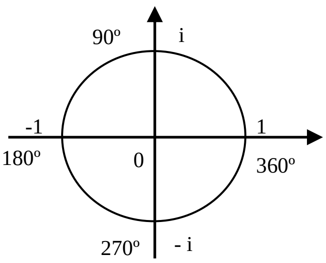
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \lfloor \theta} = \sqrt[n]{r} \lfloor \theta/n$$

cuya expresión genérica es:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\text{Cos}\left(\frac{\theta + 360^o k}{n}\right) + i\ \text{Sen}\left(\frac{\theta + 360^o k}{n}\right)\right]}$$

donde: $k = 0, 1, 2, 3 \,\ldots\ldots\ldots, (n-1)$

Tener en cuenta:



1 = Cos 0º + i sen 0

i = Cos 90º + i sen 90º

-1 = Cos 180º + i sen 180º

- i = Cos 270º + i sen 270º

7.15 RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD

Resolver: $x^3 : 1$

Solución

Como; 1 = Cos 0º + i Sen θ, entonces

$X = \sqrt[3]{1} = (\text{Cos } 0º + i \text{ Sen } 0º)^{1/3}$

Por De Moivre; se tiene:

$X = \sqrt[3]{1} =$

$\text{Cos}\left(\frac{0º + 360º k}{3}\right) + i \,\text{sen}\left(\frac{0º + 360º k}{3}\right)$

Donde : k = 0, 1, 2

Para k = 0

$X_1 = \text{Cos } 0º + i \text{ sen } 0º \rightarrow \boxed{x_1 = 1}$

Para k = 1 → $x_2 = \cos 120º + i \text{ sen } 120º$

$X_2 = -\cos 60º + i \text{ sen } 60º$

$$\boxed{X_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Para k = 2 → $x_3 = \cos 240º + i \text{ sen } 240º$

$X_3 = -\cos 60º + i \text{ sen } 60º$

$$\boxed{X_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

PROPIEDADES DE LA RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD

1. Una de las raíces complejas de la raíz cúbica de la unidad es el cuadrado de la otra.
2. La suma de las tres raíces cúbicas de la unidad es igual a cero
3. El producto de las raíces compleja de la raíz cúbica de la unidad es igual a 1

En conclusión:

$$\sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1 \\ w \\ w^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Prop.}} \begin{cases} a)\ 1 + w + w^2 = 0 \\ b)\ w \cdot w^2 = w^3 = 1 \\ c)\ w^{3k} = 1 \end{cases}$$

TEORÍA DE ECUACIONES

8.1 DEFINICIONES BÁSICAS

Igualdad.- Es la relación que nos indica que dos expresiones tienen el mismo valor en un cierto orden de ideas.
Ejm.: Si A y B tienen el mismo valor, entonces decimos que:

$\boxed{A = B}$ donde: $\begin{cases} \text{A: Primer miembro de la igualdad} \\ \text{B: Segundo Miembro de la igualdad} \end{cases}$

8.2 CLASES DE IGUALDADES

A.- Igualdad Absoluta:
Formalmente son identidades que se verifican para cualquier valor numérico de sus letras, en la cual están definidos.
Ejemplo:
a) $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12\,x + 8$
b) $(x + a)\,(x - a) = x^2 - a^2$
c) $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2\,(x^2 + y^2)$

B.- Igualdad relativa o ecuación
Se llaman también igualdades condicionales y se verifican para algunos valores de sus variables.

Ejemplos:
a) $3x - 2 = x+2$; se verifica para $x = 2$
b) $x^3 - 6x^2 + 11\,x - 6 = 0$; se verifica para:
$x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$
c) $x^2 - 1 = 0$; se verifica para $x = 1$
d) $x^4 - 16 = 0$; se verifica para $x = -2$
e) $x^5 + 1 = 0$; se verifica para $x = -1$
f) $x^7 + x^6 - 2 = 0$; se verifica para $x = 1$
g) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = 5$; se verifica para $x = 6$.

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

Existen varias formas de clasificar a una ecuación:

A) Atendiendo al grado.- Las ecuaciones pueden ser, de primer grado, de segundo grado, de tercer grado, etc. Ejemplos:
a) $5\,x + 3 = 0$ .... (1º)
b) $3x^2 - 11\,x - 5 = 0$ .... (2º)
c) $9x^3 - x - 2 = 0$ .... (3º)

B) Por el número de incógnitas, las ecuaciones pueden ser, de una incógnita, de dos incógnitas, de tres incógnitas, etc. Ejemplos:
a) De una incógnita:
$$5x^4 - x^2 + 3 = 0$$
b) De dos incógnitas
$$\begin{cases} 3x - 5\,y = -2 \;\;\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 4x - 3\,y = 7 \;\;\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

C) Atendiendo a sus coeficientes, las ecuaciones pueden ser numéricas o literales. Ejemplos:
a) Numérica: $2x^2 - 6x - 7 = 0$
b) Literal : $ax^4 - bx^3 + c = 0$

D) Atendiendo a su solución, las ecuaciones pueden ser compatibles o incompatibles

a) **Ecuaciones compatibles,** son aquellas que admiten soluciones y a su vez pueden ser:

a.₁) Compatibles determinadas.- Estas ecuaciones presentan un número finito de soluciones.

a.2) Compatibles Indeterminadas
Estas ecuaciones admiten infinitas soluciones.

b) Incompatibles o absurdas. Llamadas también incosistentes, se caracterizan por que no tienen solución.

E) Atendiendo a su estructura algebraica, las ecuaciones pueden ser:

a) Ecuaciones polinomiales

$$2x^4 - x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

b) Ecuaciones fraccionarias

$$\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{5}{x^4 + 3} = 0$$

c) Ecuaciones irracionales

$$\sqrt{x^3 - 1} - \sqrt{2x - 3} = 0$$

d) Ecuaciones trascendentes

i) $2^{x-3} + 2^{x-4} = 12$

ii) $\text{Log}_x (x - 2) - 5x + 3 = 0$

ECUACIONES EQUIVALENTES.-
Son todas aquellas ecuaciones que presentan las mismas soluciones.

Ejemplo:
La ecuación: $5x - 3 = 2x + 6$
Es equivalente a:
La ecuación: $x + 2 = 5$
Ya que la solución común es:

$$\boxed{X = 3}$$

ECUACIONES PARCIALMENTE EQUIVALENTES

Son aquellas ecuaciones que por lo menos presentan una solución común.
Ejemplo:
La ecuación : $x^2 - 5x + 6 = 0$
Es parcialmente equivalente con la ecuación $\sqrt{x-2} = 0$; ya que se verifica para $x = 2$.

8.4 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES EN TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES

I. Si a los dos miembros de una ecuación, se suma o resta una misma expresión entera, o en forma particular un número, la ecuación resultante es equivalente a la ecuación propuesta. Es decir:

$$\boxed{\text{Si: } A = B \Rightarrow A \pm m = B \pm m}$$

II. Si a los dos miembros de una ecuación se multiplica o divide por una expresión algebraica independiente de cualquier variable (diferente de cero y/o diferente de infinito) Se obtiene una nueva ecuación equivalente a la ecuación propuesta. Es decir:

$$\text{Si}: A = B \Rightarrow \begin{cases} A \cdot m = B \cdot m \\ \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{m} \end{cases}$$

$m \neq 0 \wedge m \neq \infty$

III. Si a los dos miembros de una ecuación se potencian o se extraen radicales de un mismo grado, la ecuación resultante es parcialmente equivalente a la ecuación propuesta.

8.5 SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Dada la ecuación $P(x) = 0$, la solución de la ecuación es el valor que toma la incógnita, de forma que al remplazar este valor en la ecuación, esta se transforma en una igualdad numérica verdadera.

Ejemplo: La ecuación:

$$2x^2 - 5x = 7x - 10$$

es verdadera para $x = 5$, ya que:

$$2(5)^2 - 5(5) = 7(5) - 10$$

$\therefore \boxed{x = 5}$ es solución de la ecuación.

8.6 CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

El conjunto solución (C.S.) de una ecuación es el conjunto que está formado por la reunión de todas las soluciones.

Ejemplo # 1.- Las soluciones de la ecuación:
$(x - 3)\ (x + 4)\ (x - 1) = 0$, son:
$x = 3;\ x = -4;\ x = 1$
Por consiguiente el conjunto solución es C.S. = $\{-4, 1, 3\}$

Ejemplo # 2.- El conjunto solución de la ecuación : $(x - 2)^3 (x + 1)^2 = 0$ es: C.S. = $\{2, -1,\}$, el cual se obtiene cuando cada factor se iguala a cero. No olvidar que la ecuación propuesta tiene por raíces: 2, 2, 2, -1, -1.

Observación :

$\boxed{\mathbf{A.\ B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0}}$

8.7 ECUACIÓN POLINOMIAL CON UNA INCÓGNITA

Es aquella ecuación cuya forma canónica o general adopta la forma:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots.$$
$$\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Esta ecuación es de grado "n" si y solo si: $a_0 \neq 0$ de otro lado $a_0, a_1, a_2 \ldots.., a_n$ son coeficientes de la ecuación de grado "n".

Raíz de un Polinomio P(x).- Es el valor que al ser reemplazado en P(x), este toma el valor cero.
Ejemplo:
Dado el polinomio: $P(x) = x^3 + 1$ una de sus raíces es $\boxed{x = -1}$
Ya que : $P(-1) = (-1)^3 + 1 = 0$

> **Observación:** Toda ecuación polinomial de grado "n" tiene "n" raíces

TEOREMA DEL FACTOR.- Si un polinomio P(x) se anula para x = a, entonces (x – a) es un factor de P(x) y por consiguiente "a" es una raíz de dicho polinomio.
Dicho de otra forma:
Dado P(x) = 0, tal que P(a) = 0 entonces (x – a) es un factor de P(x).
Se cumple que $\boxed{P(x) \equiv (x - a)\ Q(x)}$

8.8 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Cuántas raíces tienen las siguientes ecuaciones:
   a) $P(x) = x^5 - x + 2 = 0$
   Rpta. 5 raíces.
   b) $P(x) = (x + 3)\ (x - 2)\ (x - 4) + x^6$
   Rpta. 6 raíces
   c) $P(x) = (x - 4)^3 (x + 6)^2 (x - 7)^3 + 1 = 0$
   Rpta. 8 raíces

2. Hallar el conjunto solución en las siguientes ecuaciones:
   a) $P(x) = (x-3)\ (x + 2)\ (x - 3)\ (x + 2) = 0$
   Rpta. C.S. = $\{-2, 3\}$
   b) $P(x) = (x + 1)^3 (x - 2)^2 (x + 6)^3 = 0$
   Rpta. C.S. = $\{-1: 2; -6\}$
   c) $P(x) = (x + 1)\ (x + 2)\ (x + 3) \ldots (x + n)$
   Rpta. C.S. = $\{-1; -2; -3; \ldots\ldots ; -n\}$

3. Determinar las raíces de las siguientes ecuaciones: P(x) = 0
   a) $P(x) = (x - 1)\ (x + 2)\ (x - 3)\ (x - 5)$
   Rpta. $x_1 = 1;\ x_2 = -2;\ x_3 = 3;\ x_4 = 5$
   b) $P(x) = (x - 1)^3 (x + 6)^2 (x - 3)$
   Rpta. $x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1;\ x_4 = -6$
   $x_5 = -6;\ x_6 = 3$
   c) $P(x) = x^3 - 1$
   Rpta. $x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{1 + \sqrt{3}\ i}{2}$ $x_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}\ i}{2}$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.
La ecuación polinomial.

$P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$
Con coeficiente $a_o \neq 0$, y grado $n \geq 1$ con cualquier tipo de coeficientes numéricos tiene por lo menos una raíz ya sea real o compleja.

Ejemplo # 1.- La ecuación: $P(x) = 0$
$P(x) = x^4 - 1$; tiene una raíz igual a:
$i = \sqrt{-1}$, ya que:
$P(i) = i^4 - 1 = 1 - 1 = 0$

Ejemplo # 2.- La ecuación: $P(x)=0$
$P(x) = x^2 - 2$; tiene una raíz igual a : $-\sqrt{2}$, ya que :
$P(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0$

8.9 RELACIONES ENTRE LAS RAÍCES Y COEFICIENTES DE UNA ECUACIÓN POLINOMIAL (TEOREMA DE CARDANO VIETA)

Dada la ecuación polinomial de grado "n" y coeficiente principal diferente de cero ($a_o \neq 0$)
$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a^n = 0$
que también puede ser representada por:

$$a_o \left[x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} x^{n-2} + .. + \frac{a_n}{a_0}\right] = 0$$

cuyas raíces son $\{x_1, x_2, x_3 ...., x_n\}$
el cual nos representa la ecuación
$a_o (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) .... (x - x_n) = 0$
cuyo desarrollo en productos notables es:

$$a_o [x^n - (x_1 + x_2 + x_3 + ... x_n) x^{n-1} + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + ... x_{n-1} x_n) x^{n-2} - (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + ... x_{n-2} x_{n-1} x_n) x^{n-3} + ... + (-1)^n (x_1 x_2 x_3 + ... x_n)] = 0$$

Al identificar los coeficientes, vemos las relaciones correspondientes entre coeficientes y raíces, así tenemos:

A₁.- Suma de raíces

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = -\frac{a_1}{a_o}}$$

A₂.- Suma de los productos de las raíces tomadas de dos en dos o suma de productos binarios.

$$\boxed{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + ... + x_{n-1} x_n = +\frac{a_2}{a_o}}$$

A₃.- Suma de los productos de las raíces tomadas de tres en tres o suma de productos ternarios.

$$\boxed{x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + ... + x_{n-1} x_n = -\frac{a_3}{a_o}}$$

Así sucesivamente:

An.- Producto de todas las raíces.

$$\boxed{x_1 x_2 x_3 ...... x_{n-1} x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_o}}$$

8.10 EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio #1.- Dada la ecuación
$5x^4 - 3x3 + 2x - 3 = 0$

Hallar la suma de sus raíces y su producto correspondiente.

Solución:
Teniendo en cuenta que la suma de las raíces de una ecuación de grado "n" es igual al coeficiente de x^{n-1} entre el coeficiente de x^n, con signo cambiado; se tendría:

$$5x^4 - 3x^3 + 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{Coef. de } x^4 = 5 \\ \text{Coef. de } x^3 = -3 \end{cases}$$

suma de raíces:

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{-3}{5} = \frac{3}{5}}$$

De otro lado el producto de todas las raíces de una ecuación de grado "n" es igual a su término independiente dividido entre el coeficiente de x^n y multiplicado por $(-1)^n$. Es decir para:

$$5x^4 - 3x^3 + 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{Coef. de } x^4 = 5 \\ \text{Termino Indepediente.} = -3 \end{cases}$$

De donde:
Producto de raíces:

$$\boxed{x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3 \,.\, x_4 = (-1)^4 \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{5}}$$

Ejercicio # 2.- Resolver:

$$x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

Sabiendo que dos de sus raíces suman menos uno.

Solución:
Sean las raíces: $\{x_1, x_2, x_3\}$
Por condición: $x_1 + x_2 = -1$ ..... (1)
Del Teorema de Cardano – Vieta

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-1}{1} = 1$ .... (2)

Reemplazando (1) en (2):

$-1 + x_3 = 1 \rightarrow \boxed{x_3 = 2}$

Siendo $x_3 = 2$, una de las raíces de la ecuación, esta contiene al factor $(x - 2)$, obteniéndose el otro factor, por la regla de Ruffini:

$x - 2 = 0$	1	−1	−1	−2
$x = 2$		2	2	+2
	1	+1	1	0

De donde, tendríamos:

$(x - 2)(x^2 + x + 1) = 0$

Igualando cada factor a cero:

a) $x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2}$
b) $x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

$\therefore$ Las raíces de la ecuación dada son:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2} \;;\; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2} \;;\; x_3 = 2$$

8.11 EJERCICIOS PROPUESTOS

1) En las siguientes ecuaciones determinar la suma de las raíces y el producto correspondiente.

a) $2x^7 + 3x^5 - 5x^2 - 7 = 0$

Rpta: Suma = 0 ; Producto = $\frac{7}{2}$

b) $3x^9 - 2x^8 + 7x^6 - 5x = 0$

Rpta: Suma = $\frac{2}{3}$ **; Producto = 0**

c) $4x^8 - 5x^3 - 2x = 0$

Rpta: Suma = 0 ; Producto = 0

d) $7x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 8x + 3 = 0$

Rpta: Suma = $\frac{2}{7}$ **; Producto =** $-\frac{3}{7}$

2) Resolver: $2x^3 - x^2 - 7x - 3 = 0$, sabiendo que dos de sus raíces suman la unidad.

Rpta: $x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$; $x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$; $x_3 = -\frac{1}{2}$

3) Resolver: $36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$, sabiendo que una de las raíces es igual a la suma de las otras dos:

Rpta: $x_1 = \frac{1}{6}$ **;** $x_2 = \frac{1}{2}$ **;** $x_3 = \frac{1}{3}$

4) Resolver: $x^4 - 12x - 5 = 0$, sabiendo que admiten dos raíces que suman 2.

Rpta: $x_1 = 1 + \sqrt{2}$; $x_2 = 1 - \sqrt{2}$; $x_3 = -1 + 2i$
$x_4 = -1 - 2i$

8.12 RESOLUCION DE ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Con respecto a las ecuaciones de grado superior a 2; se efectúa en forma general:

(a) Factorizando la ecuación propuesta e igualando a cero cada factor.

(b) Por artificios, damos forma de ecuaciones conocidas, por ejemplo las cuadráticas y otras que se estudiaran.

Debe tenerse en cuenta los siguientes principios: P(x)=0

1. Toda ecuación polinomial de grado "n", tiene "n" raíces.
2. En toda ecuación con coeficientes racionales, las raíces complejas se presentan por pares conjugados.
3. En toda ecuación con coeficientes racionales, las raíces irracionales, se presentan por pares conjugados.

Ejemplo # 1.- Una raíz de la ecuación. P(x) = 0, donde:

$P(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 2x - 12$

Es : $1-\sqrt{3}$, hallar las otras raíces

Solución:

Dado que : $x_1 = 1-\sqrt{3}$, otra de sus raíces será la conjugada :

$x_2 = 1 + \sqrt{3}$; del teorema del factor.

$P(x) = [x-(1-\sqrt{3})][x-(1+\sqrt{3})]Q(x)$

$P(x) = [(x-1)^2-(\sqrt{3})^2]\ Q(x)$

$P(x) = (x^2-2x-2)\ Q(x)$

Por división : $Q(x) = x^2 - 5x + 6$

ó : $Q(x) = (x-2)(x-3)$

Con lo cual:

$P(x) = (x^2-2x-2)(x-2)(x-3)=0$

Se divide las raíces por:

$$\boxed{x_1 = 1-\sqrt{3}\ ;\ x_2 = 1+\sqrt{3}\ ;\ x_3=2;x_4=3}$$

8.13 PLANTEO DE ECUACIONES

Plantean una ecuación es la traducción de un problema del lenguaje materno al lenguaje matemático.

Problema 1.- ¿Qué día y hora del mes de abril se verifica que la fracción transcurrida del mes es igual a la fracción transcurrida del año? (El año es bisiesto).

Solución:

Debe entenderse que:

1. Fracción del Mes: De Abril $\dfrac{\text{Días Transcurridas}}{30 \text{ días}}$

2. Fracción del año: $\dfrac{\text{Días transcurridas}}{366 \text{ días}}$

Analizando:

i. Para el mes de Abril
Supongamos que hace transcurrido "x" días, entonces su fracción será: $\dfrac{x}{30}$

ii. Para el año bisiesto (366 días). Se observa que han transcurrido.

$$\underbrace{E}_{31\text{ días}} + \underbrace{F}_{29\text{ días}} + \underbrace{M}_{31\text{ días}} + \underbrace{X}_{\text{días}} = 91 + x$$

Con lo cual su fracción será : $\dfrac{91+x}{366}$

Dado que las fracciones son iguales, se cumple:

$$\frac{x}{30} = \frac{91+x}{366} \; --> x = \frac{65}{8}\,días$$

ó: $x = 8\ \dfrac{1}{8}$ días

como el día tiene 24 horas → x= 8 días y 3 horas. Han transcurrido 8 días, más 3 horas.

El día pedido será el 9 de Abril a las 3 a.m. Rpta.

Problema 2.- Un padre tiene 32 años y su hijo 5 ¿Al cabo de cuántos años, la edad del padre será diez veces mayor que la de su hijo?

Solución:
Sea "x" la cantidad de años que se necesitan para que se cumpla la condición:
Luego el padre tendrá : 32 +x
y el hijo: 5 + x
∴ Se cumple :

$$32 + x = 10\ (5+x)$$

Resolviendo :

$$32 + x = 50+10x$$
$$-18 = 9x \rightarrow \boxed{x = -2}$$

El signo menos indica que la condición se cumplió:

Hace dos años : Rpta.

Problema 3.- Dispongo de 800 soles y gasto los $\frac{3}{5}$ de lo que no gasto ¿Cuánto no gasto?.

Solución:
De acuerdo al enunciado
No gasto : x
Gasto : 800 – x
De donde la ecuación resultante es:

$$800 - x = \frac{3}{5}\ x$$

$4000 - 5x = 3x \rightarrow x = 500$

∴ No gasto 500 soles Rpta.

Problema 4.- ¿Qué día del año marcará la hoja de un almanaque creando el número de horas arrancadas excede en 8 a los $\frac{4}{47}$ del número de hojas que quedan?

Solución:
Sea "x" el número de hojas arrancadas.
Entonces:
(365 – x) es el número de hojas que faltan por arrancar.
Luego la ecuación resultante es:

$$x - \frac{4}{47}\ (365 - x) = 8$$

de donde : $\boxed{\mathbf{x = 36}}$

Como enero tiene 31 días, quiere decir que se han arrancado 5 hojas del mes de febrero por consiguiente, el día del año que marca el almanaque es el 6 de febrero. Rpta.

8.14 PROBLEMAS DE REPASO

01. Determinar "k" en la ecuación de segundo grado:
$(k - 2)\ x^2 - 2k\ x + 9 = 0$
sabiendo que sus raíces son iguales.

Solución
Dado que las raíces son iguales, el discriminante vale cero, es decir:

$$\boxed{\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4\ ac = 0}$$

Remplazando:
$(-2\ k)^2 - 4(k - 2)\ 9 = 0$
$4\ k^2 - 4\ (9k - 18) = 0$

Simplificando:
$k^2 - 9\ k + 18 = 0$

Factorizando:

$$(k - 6)\ (k - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 6 \\ \text{ó} \\ k = 3 \end{cases}$$

02. La suma de tres números pares consecutivos es 66. Hallar el menor de los números .

Solución:
De acuerdo a los datos:
El # menor : x
El # del medio : x + 2
El # mayor : x + 4

Por consiguiente la ecuación resultante es:
$x + x + 2 + x + 4 = 66$
$3x = 60$

$\boxed{x = 20}$ **Rpta.**

03. Un padre tiene 30 años y su hijo 3.
Dentro de cuantos años la edad del padre es el cuádruple de la de su hijo.

Solución:
Actualmente :
Edad del padre : 30
Edad del hijo : 3
Dentro de "x" años
Edad del padre : 30 + x
Edad del hijo : 3 + x
Ecuación resultante:
$30 + x = 4(3 + x)$
Resolviendo:
$30 + x = 12 + 4x$
$18 = 3x$
de donde:
$x = 6$ años

∴ Dentro de 6 años la edad del padre será el cuádruple de la de su hijo. **Rpta.**

8.15 EJERCICIOS

1. Un individuo va en un tren que lleva una velocidad de 30 km/hr. y ve pasar en 3 segundos otro tren que marcha en sentido contrario; sabiendo que el segundo tren tiene una longitud de 60 mts, su velocidad es:

a) 35 km/hr b) 38 km/hr
c) 40 km/hr d) 42 km/hr.
e) 44 km/hr

2. La cantidad que debe restarse a los dos términos de la fracción $\frac{a}{b}$ para que llegue a ser igual a su cuadrado es:

a) $\frac{b+a}{ab}$ b) $\frac{ab}{a+b}$ c) $\frac{ab}{a-b}$
d) $\frac{a-b}{ab}$ e) $\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}$

04. Calcular en que instante del viernes, la fracción de día transcurrido es igual a la fracción transcurrida de la semana.
a) 2 p.m. b) 3 p.m. c) 4 p.m.
d) 8 p.m. e) 9 p.m.

05. Guillermo tiene hoy cuatro veces los años que tenía Walter cuando el tenía 13 años; Walter tiene hoy 22 años. Hallar la edad de Guillermo.
a) 25 b) 26 c) 27 d) 28 e) 29

06. Un niño robó flores en un jardín, y después de andar 80 pasos empezó a perseguirle el jardinero. El niño da cuatro pasos mientras que el jardinero da tres; pero cinco pasos de éste equivalen a siete de aquel. El número de pasos que dio el jardinero para alcanzar al niño y el número de estos que dio el niño mientras duró la persecución, fueron respectivamente:
a) 600 y 800 pasos
b) 900 y 1200 pasos
c) 1200 y 1600 pasos
d) 1500 y 2000 pasos
e) 1800 y 2400 pasos

SISTEMA DE ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR
INTERPRETACION GRÁFICA

ECUACIONES REDUCIBLES A CUADRÁTICAS

Son aquellas ecuaciones que al hacer un cambio de variable en su estructuración algebraica se transforma en una ecuación de la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad ; \quad a \neq 0$$

A continuación mostraremos diversos **ejemplos sobre transformación de ecuaciones a ecuaciones cuadráticas.**

Ejem. 1: Resolver

$$\sqrt{\frac{3x-2}{2x-5}} + 3\sqrt{\frac{2x-5}{3x-2}} = 4$$

Solución:

Haciendo la transformación:

$$\sqrt{\frac{3x-2}{2x-5}} = z \rightarrow \sqrt{\frac{2x-5}{3x-2}} = \frac{1}{z}$$

donde $z > 0$; la ecuación dada se transforma en:

$$Z + \frac{3}{Z} = 4 \quad \rightarrow \quad z^2 - 4z + 3 = 0$$

Factorizando; $(z-3)(z-1) = 0$

Vemos que: $z = 3 \vee z = 1$

Para: $z = 3 \rightarrow \sqrt{\frac{3x-2}{2X-5}} = 3$

$$\frac{3x-2}{2x-5} = 9$$

resolviendo: $\boxed{x = \frac{43}{15}}$

Para : $z = 1 \rightarrow \sqrt{\frac{3x-2}{2x-5}} = 1$

Resolviendo: $\boxed{x = -3}$

$\therefore$ el conjunto solución es: C.S. $\left\{\frac{43}{15}; -3\right\}$

Ejem. # 2: Resolver la ecuación:

$$2x^2 + 4x - 7\sqrt{x^2 + 2x + 10} = -5$$

Solución

Expresando la ecuación en la siguiente forma:

$$2(x^2 + 2x + 10 - 10) - 7\sqrt{x^2 + 2x + 10} = -5$$

De otro lado; haciendo : $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = a$

tal que $(a > 0)$; se tiene:

$$2(a^2 - 10) - 7a = -5$$
$$2a^2 - 7a - 15 = 0$$

Factorizando por aspa simple:

2a   3 → 3 a
a   -5 → -10 a
-7 a

$$(2a + 3)(a - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 5 : \text{Si} \\ \quad \vee \\ a = -\frac{3}{2} : \text{No} \end{cases}$$

volviendo a la variable original:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 5 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 15 = 0$$

Factorizando:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

x   5 → 5 x
x   -3 → -3 x
2 x

$(x + 5)(x - 3) = 0 \rightarrow$ C.S. $= \{-5, 3\}$

Ejm. # 3.- Resolver

$(x-3)(x-4)(x-2)(x-1)-120=0$

Solución:

Multiplicando los factores "2" a "2" de forma que la suma de los términos independientes sean iguales.

$$(x-3)(x-4)(x-2)(x-1)-120=0$$

obtenemos:

$(x^2-5x+6)(x^2-5x+4)-120=0$

Haciendo la transformación; $x^2-5x=a$ se tendría, la ecuación:

$(a+6)(a+4)-120=0$

$a^2+10a-96=0$

Factorizando:

$$(a+16)(a-6)=0 \rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ \text{ó} \\ a = -16 \end{cases}$$

volviendo a la variable original

Para: $a=6$

$$x^2-5x-6=0 \rightarrow (x-6)(x+1)=0 \begin{cases} x=6 \\ \text{ó} \\ x=-1 \end{cases}$$

Para : $\boxed{a=-16}$

$$x^2-5x+16=0 \rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-64}}{2}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{39}\,i}{2}$$

$$\therefore C.S. = \left\{-1;6;\ \frac{5-\sqrt{39}\,i}{2};\ \frac{5+\sqrt{39}\,i}{2}\right\}$$

Ejm. # 4: Resolver:

$$\sqrt[n]{\frac{x^2-3x+2}{x^2+5x-8}}+\sqrt[n]{\frac{x^2+5x-8}{x^2-3x+2}}=2$$

Solución:

Haciendo la transformación:

$$\sqrt[n]{\frac{x^2-3x+2}{x^2+5x-8}}=a\ :\ \sqrt[n]{\frac{x^2+5x-8}{x^2-3x+2}}=\frac{1}{a}$$

la ecuación dada, se transforma en:

$$a+\frac{1}{a}=2 \rightarrow a^2-2a+1=0$$

$$(a-1)^2=0$$

$$\therefore \boxed{a=1}$$

volviendo a la variable original:

$$\sqrt[n]{\frac{x^2-3x+2}{x^2+5x-8}}=1 \rightarrow x^2-3x+2=x^2+5x-8$$

$$-8x=-10$$

$$\therefore \boxed{x=\frac{5}{4}} \text{ Rpta.}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Determine un valor de "x", para las siguientes ecuaciones:

01). $\sqrt{\frac{3x-7}{2x-5}}+\sqrt{\frac{2x-5}{3x-7}}=2$

Rpta. $\boxed{x=2}$

02). $(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)-24=0$

Rpta. $\boxed{x=7}$

03). $2x^2-3x-2\sqrt{2x^2-3x+7}=1$

Rpta. $\boxed{x=3}$

04). $\sqrt[n]{\frac{x^4+x^3-x+6}{x^4+x^3+2x-3}}+\sqrt[n]{\frac{x^4+x^3+2x-3}{x^4+x^3-x+6}}=2$

Rpta: $\boxed{x=3}$

05). $x(x+1)(x+2)(x+3)-120=0$

Rpta. $\boxed{x=2}$

06). $6x^2-4x-9\sqrt{3x^2-2x+9}=17$

Rpta. $\boxed{x=4}$

07). $\frac{2x-3}{3x-5}+\frac{24x-40}{2x-3}=6$

Rpta. $\boxed{x=1{,}7}$

08) $\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}+2\right)=\frac{64}{9}$

Rpta. $\boxed{x=3}$

ECUACIÓN BICUADRADA

Es la ecuación polinomial de cuarto grado que contiene solamente potencias pares de la incógnita, su forma canónica o general es:

$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}$; $(a \neq 0)$

"a" ; "b" y "c" son los coeficientes; "x" es la incógnita.

RAÍCES DE LA ECUACIÓN BICUADRADA

La ecuación bicuadrada:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$; $a \neq 0$

presenta cuatro raíces, que se obtienen haciendo el cambio de variable:

$x^2 = y \rightarrow a\,y^2 + b\,y + c = 0$; $(a \neq 0)$

Las raíces correspondientes a esta última ecuación están dadas por:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dado que:

$x^2 = y \rightarrow x = \pm\sqrt{y}$; con lo cual:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

en consecuencia, las raíces correspondientes de la ecuación bicuadrada son:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = m$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = -m$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = n$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = -n$$

OBSERVACIÓN:

La ecuación bicuadrada:

$ax^4 + bx^2 + c = 0$; se puede resolver por factorización (Aspa simple).

Si: $b^2 - 4ac$; es un cuadrado perfecto.

Ejem. # 1: Resolver

$$9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$$

Solución

Dado que: $a = 9$; $b = -13$; $c = 4$

$b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4(9)(4) = 25$; es un cuadrado perfecto, la ecuación es factorizable; en efecto los factores de:

$$9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$$

$9x^2 \quad -4 \rightarrow -4x^2$

$x^2 \quad -1 \rightarrow \underline{-9x^2}$

$-13x^2$

Son: $(9x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$

Asimismo, cada paréntesis se puede factorizar aplicando diferencia de cuadrados, es decir:

$(3x + 2)(3x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0$

Igualando cada factor a cero las raíces correspondientes son:

$$\mathbf{x_1 = -\frac{2}{3}\ ;\quad x_2 = \frac{2}{3}\ ;\quad x_3 = -1\ ;\ x_4 = 1}$$

Ejm. # 2: Resolver:

$$\mathbf{x^4 - 15x^2 - 16 = 0}$$

Solución

Como: $b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4(1)(-16) = 289$ es un cuadrado perfecto, los factores serían:

$$(x^2 - 16)(x^2 + 1) = 0$$

igualando cada factor a cero:

1º) $x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = 16$ $\begin{cases} x_1 = 4 \\ \text{ó} \\ x_2 = -4 \end{cases}$

2º) $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$ $\begin{cases} x_3 = i \\ \text{ó} \\ x_4 = -i \end{cases}$

Ejm. # 3 : Resolver:

$$\frac{x^4 + x^2\ a^2}{x^4 + x^2\ a^2 + a^4} = \frac{90}{91}$$

Solución:

De la propiedad de proporciones, se obtiene:

$91x^4 + 91x^2 a^2 = 90x^4 + 90 x^2 a^2 + 90 a^4$

$$x^4 + a^2 x^2 - 90 a^4 = 0$$

Factorizando; se tendría:

$$(x^2 + 10 a^2)(x^2 - 9 a^2) = 0$$

Igualando cada factor a cero; las raíces de la ecuación son:

i) $x^2 = -10 a^2 \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{10}\ a\, i \\ \quad \text{v} \\ x_2 = -\sqrt{10}\ a\, i \end{cases}$

ii) $x^2 = 9 a^2 \quad \begin{cases} x_3 = 3a \\ \quad \text{v} \\ x_4 = -3a \end{cases}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver:

01) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

$x_1 = \sqrt{2}\, i; \qquad x_2 = -\sqrt{2}\, i;$

$x_3 = \sqrt{3}\, i; \qquad x_4 = -\sqrt{3}\, i$

02) $x^4 - 68x^2 + 256 = 0$

$x_1 = 2;\ x_2 = -2\ ;\ x_3 = 8 :\ x_4 = -8$

03) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$

$x_1 = 7;\ x_2 = -7\ ;\ x_3 = 1\ ;\ x_4 = -1$

04) $x^2(x^2 + 32) = 144$

$x_1 = 6i;\ x_2 = -6i\ ;\ x_3 = 2\ ;\ x_4 = -2$

05) $(1 + x)^4 + (1 - x)^4 = 34$

$x_1 = \sqrt{2};\quad x_2 = -\sqrt{2}\ ;\ x_3 = 2\sqrt{2}\, i$

$x_4 = -2\sqrt{2}\, i.$

06) $\dfrac{12x^2 - a^2}{a^4} = \dfrac{1}{x^2}$

$x_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3};\quad x_2 = -\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\quad x_3 = \dfrac{a}{2}\, i$

$x_4 = -\dfrac{a}{2}\, i$

07) $4(a^2 - b^2)x^2 = (a^2 - b^2 + x^2)^2$

$x_1 = \sqrt{a^2 - b^2}\ ;\ x_2 = -\sqrt{a^2 - b^2}$

$x_3 = \sqrt{a^2 - b^2}\ ;\ x_4 = -\sqrt{a^2 - b^2}$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN BICUADRADA

Respecto a la ecuación:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad ; \quad (a \neq 0)$$

de raíces: x_1, x_2; x_3; x_4; se cumple:

de acuerdo con el Teorema de Cardano – Vieta.

I. SUMA DE LAS RAÍCES

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0}$$

II. SUMA DEL PRODUCTO DE LAS RAÍCES TOMADAS DE DOS EN DOS.

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 = \frac{b}{a}}$$

III. PRODUCTO DE LAS RAÍCES

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a}}$$

RECONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN BICUADRADA

Conociendo las 4 raíces de la ecuación bicuadrada: x_1; x_2; x_3 y x_4. La ecuación a formar adopta la forma:

$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$

efectuando las operaciones indicadas, tendríamos:

$$\boxed{x^4 + (x_1 x_2 + x_3 x_4)x^2 + x_1 x_2 x_3 x_4 = 0}$$

EJERCICIOS

01.) Una de las soluciones de una ecuación bicuadrada es 5. Reconstruir la ecuación; si:

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4 = 225$

Solución:

Si una de las raíces es $\boxed{x_1 = 5}$; la otra raíz es: $\boxed{x_2 = -5}$

Reemplazando en el dato:

$(5)\ (-5)\ x_3\ x_4 = 225 \rightarrow x_3\ x_4 = -9$
como $x_3 = -x_4 \Rightarrow (-x_4)\ (x_4) = -9$
$x_4^2 = 9$

Con lo cual : $\boxed{x_4 = 3}$ y $\boxed{x_3 = -3}$

Reemplazando en la fórmula:
$X^4 + (x_1\ x_2 + x_3\ x_4)\ x^2 + x_1\ x_2\ x_3\ x_4 = 0$
Obtenemos:
$X^4 + (-25 - 9)\ x^2 + (5)\ (-5)\ (-3)\ (3) = 0$
$\therefore$ la ecuación será:

$\boxed{x^4 - 34\ x^2 + 225 = 0}$ Rpta.

02.) Calcular "m" para que las cuatro raíces de la ecuación bicuadrada: $X^4 - (3m + 10)\ x^2 + (m + 2)^2 = 0$, formen una progresión aritmética.

Solución:
Sean las raíces de la ecuación bicuadrada en progresión aritmética.

$\div\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$

ó también:

$\div\ (a - 3\ r) \cdot (a - r) \cdot (a + r) \cdot (a + 3r)$
de razón " 2 r"
de las propiedades de las raíces se tiene:

1º.- $\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0}$

$a - 3\ r + a - r + a + r + a + 3r = 0$
vemos que: $a = 0$, con lo cual
$x_1 = -3\ r\ ;\ x_2 = -r\ ;\ x_3 = r\ ;\ x_4 = 3r$

2º.- $\boxed{x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 = \frac{b}{a}}$

$(-3\ r)\ (3\ r) + (-r)\ (\ r\ ) = -\frac{(3m+10)}{1}$

$\boxed{10r^2 = 3\ m + 10}$ .... (α)

3.º.- $\boxed{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a}}$

$(-3\ r)\ (-\ r)\ (\ r)\ (3\ r) = \frac{(m+2)^2}{1}$

$9\ r^4 = (m + 2)^2 \rightarrow \boxed{3r^2 = m + 2}$ .... (β)

Dividendo $(\alpha) \div (\beta)$, obtenemos:

$\frac{10\,r^2}{3\,r^2} = \frac{3m+10}{m+2} \rightarrow 10\ m + 20 = 9\ m + 30$

$\therefore\ \boxed{m\ = 10}$ Rpta.

EJERCICIOS

1. Calcular "m" para que las raíces de las ecuaciones bicuadradas estén en P.A.

a) $x^4 - (4\ m + 10)\ x^2 + (m + 7)^2 = 0$

Rpta. $\boxed{\mathbf{m = 20}}$

b) $x^4 - (4\ m + 2)\ x^2 + (2\ m - 5)^2 = 0$

Rpta. $\boxed{\mathbf{m = 7}}$

c) $x^4 - 2\ (m + 7)\ x^2 + (2m - 21)^2 = 0$

Rpta. $\boxed{\mathbf{m = 18}}$

2. Formar las ecuaciones bicuadradas, conociendo sus raíces.

a) $x_1 = -\sqrt{3}\ ;\ x_3 = \sqrt{6}$

Rpta. $\mathbf{x^4 - 9x^2 + 18 = 0}$

b) $x_1 = 2\sqrt{3}\ ;\ x_3 = -3\sqrt{3}$

Rpta. $\mathbf{x^4 + 39x^2 + 324 = 0}$

3. Una de las raíces de una ecuación bicuadrada es 7. Reconstruir la ecuación; si:
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4 = -441$

Rpta. $\mathbf{x^4 - 58\ x^2 - 441 = 0}$

SISTEMA DE ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

Es un conjunto de ecuaciones que se verifican para los mismos valores de sus incógnitas. Se presentan diversos casos:

01.- Calcular "x" en el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x + y \ = 2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha)} \\ \mathbf{x\,y \ = -1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\beta)} \end{cases}$$

Solución:

De (α) : $y = 2 - x$

Reemplazando en (β):

$X(2 - x) = -1 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

Resolviendo la ecuación cuadrática

$\boxed{x = 1 + \sqrt{2}}$ ó $\boxed{x = 1 - \sqrt{2}}$

02.- .- Resolver

$$\begin{cases} \mathbf{x + y \ = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)} \\ \mathbf{x^2 + y^2 \ = 25 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)} \end{cases}$$

Solución:

De (1) : $y = 1 - x$; remplazando en (2):

$x^2 + (1 - x)^2 = 25$

$x^2 + 1 + x^2 - 2x = 25$

Simplificando, obtenemos:

$x^2 - x - 12 = 0$

Factorizando $(x - 4)(x + 3) = 0$

Igualando cada factor a cero:

Para: $\boxed{x = 4} \rightarrow \boxed{y = -3}$

Para: $\boxed{x = -3} \rightarrow \boxed{y = 4}$

03.- Resolver:

$$\begin{cases} \mathbf{x^2 - 2\,x\,y + 3\,y^2 = 19 \ \ldots\ldots\ (1)} \\ \mathbf{2x^2 - \ xy + \ 4\,y^2 = 38 \ \ldots\ldots\ (2)} \end{cases}$$

Solución:

Haciendo la transformación: $y = k\,x$ en (1) y (2); se tendría:

$$\begin{cases} x^2 - 2\,x\,.\,kx + 3\,k^2\,x^2 = 19 \ \ldots\ldots\ (\alpha) \\ 2x^2 - \ x\,.\,kx + \ 4\,k^2\,x^2 = 38 \ \ldots\ldots\ (\beta) \end{cases}$$

Dividiendo $(\alpha) \div (\beta)$

$$\frac{x^2\,(1 - 2\,k + 3\,k^2)}{x^2\,(2 - k + 4\,k^2)} = \frac{19}{38}$$

Por proporciones:

$38 - 76\,k + 114\,k^2 = 38 - 19\,k + 76\,k^2$

$$38\,k^2 - 57\,k = 0 \begin{cases} k = 0 \ \ (\text{No}) \\ \text{ó} \\ \boxed{k = \frac{3}{2}} \ (\text{Si}) \end{cases}$$

Dado que : $y = \frac{3}{2}\,x$; en .... (α)

$$x^2 - 2x\,.\,\frac{3}{2}\,x + 3\,.\,\frac{9}{4}\,x^2 = 19$$

$$x^2 - 3x^2 + \frac{27x^2}{4} = 19 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

De donde:

Para: $\boxed{x = 2} \rightarrow \boxed{y = 3}$

Para: $\boxed{x = -2} \rightarrow \boxed{y = -3}$

4. Resolver:

$$(\alpha) \begin{cases} \dfrac{1}{2\,x + y - 6} + \dfrac{3}{x + y - 3} = 2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{7}{2\,x + y - 6} - \dfrac{5}{x + y - 3} = 1 \ \ \ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

(ß)

Solución:

Aplicando determinantes, tendríamos:

a) $$\frac{1}{2x + y - 6} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-13}{-26} = \frac{1}{2}$$

De donde: $\boxed{2\,x + y = 8}$ .... (1)

b) $$\frac{1}{x + y - 3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-13}{-26} = \frac{1}{2}$$

De donde: $\boxed{x + y = 5}$ .... (2)

Resolviendo (1) y (2):

$$\begin{cases} 2\,x + y = 8 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ x \ + y = 5 \ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

por determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8 - 5}{2 - 1} = 3$$

$\boxed{x = 3}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{10 - 8}{2 - 1} = 2$$

$\boxed{y = 2}$

5. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)\ (x - y) = 5 \text{ .... } (1) \\ (x^2 + y^2)\ (x + y) = 65 \text{ ..... } (2) \end{cases}$$

Solución

Haciendo ; $x = my$; se obtiene:

$$(\alpha) \begin{cases} (m^2 - 1)\ y^2\ (m - 1)\ y = 5 \text{ ....} \\ (m^2 + 1)\ y^2\ (m + 1)\ y = 65 \text{ ....} \end{cases} (\beta)$$

Dividiendo $(\beta) \div (\alpha)$:

$$\frac{(m^2+1)\ (m+1)}{(m+1)\ (m-1)\ (m-1)} = \frac{65}{5} = \frac{13}{1}$$

Por proporciones:

$$m^2 + 1 = 13\,m^2 - 26\,m + 13$$

simplificando:

$$6\,m^2 - 13\,m + 6 = 0$$

Factorizando:

$$\begin{array}{lclcr} 2\,m & & -3 & \rightarrow & -\ 9\,m \\ 3\,m & & -\ 2 & \rightarrow & \underline{-\ 4\,m} \\ & & & & -13\,m \end{array}$$

$$(2\,m - 3)\ (3m - 2) = 0 \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ \text{ó} \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Para : $\boxed{m = \frac{3}{2}}$

En ... (α) : $\left(\frac{9}{4} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - 1\right) y^3 = 5$

$$5\ (1)\ y^3 = 5\ (8)$$

$$\boxed{y = 2}$$

Como $x = my \rightarrow x = \frac{3}{2}\ (2)$

$$\boxed{X = 3}$$

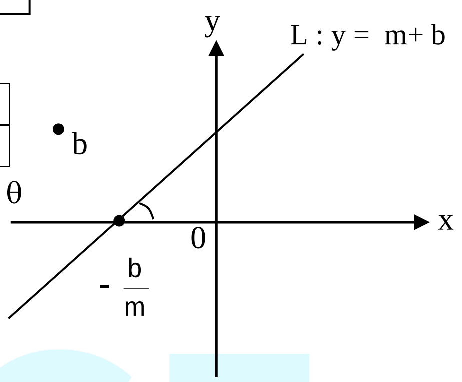
Para : $\boxed{m = \frac{2}{3}} \rightarrow \boxed{x = 2} \rightarrow \boxed{y = 3}$

GRÁFICAS DE INTERÉS

La Recta.- Su gráfica está dada por la función lineal cuya regla de correspondencia es:

$\boxed{L : y = m\,x + b}$; m , b, $x \in R$

x	0	-b/m
y	b	0



Al coeficiente "m" se le llama pendiente de la recta y es tal que: $\boxed{m = tg\ \theta}$

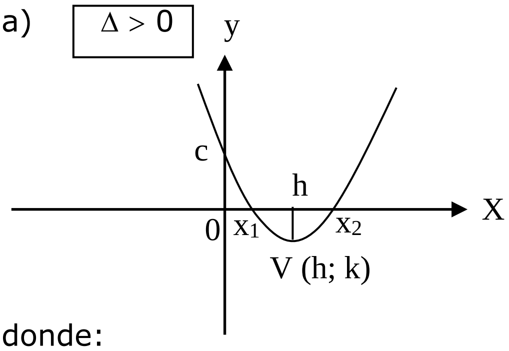
La Parábola.- Su gráfica está dada por la función cuadrática cuya regla de correspondencia es:

$\boxed{y = a\,x^2 + b\,x + c}$; $a, b, c, x \in R$; $a \neq 0$

con relación al discriminante $\Delta = b^2 - 4\,ac$, tendríamos los siguientes gráficos de la parábola.

(:) Si, $a > 0$ la parábola es cóncavo hacia arriba y dependiendo del discriminante, tendríamos:

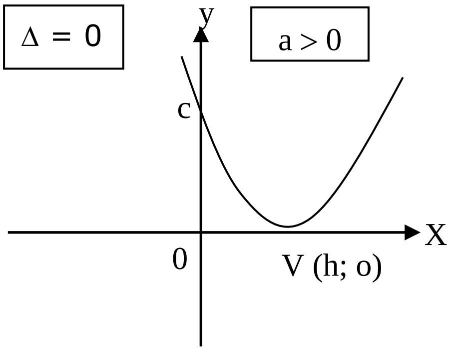
a) $\boxed{\Delta > 0}$



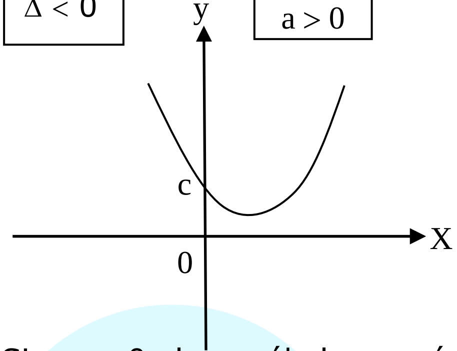
donde:

$$V\ (h, k) = V\left(-\frac{b}{2\,a}\ ;\ -\frac{\Delta}{4\,a}\right)$$

b) $\boxed{\Delta = 0}$ $\boxed{a > 0}$

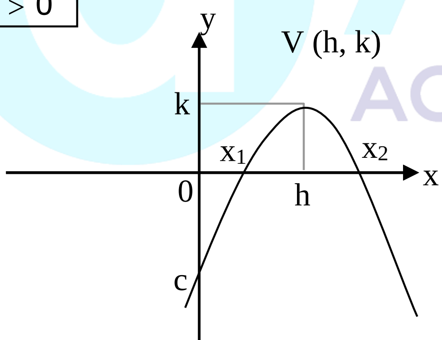


c) $\boxed{\Delta < 0}$ $\boxed{a > 0}$



II) Si, a < 0, la parábola es cóncavo hacia abajo y dependiendo del discriminante tendríamos:

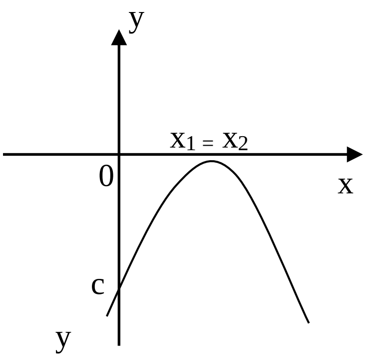
a) $\boxed{\Delta > 0}$



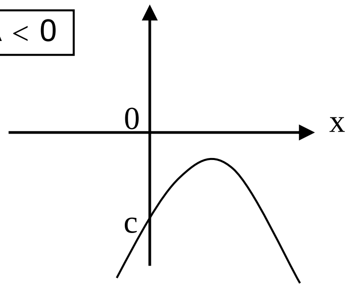
$$\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$V(h, k) = V\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

b) $\boxed{\Delta = 0}$



c) $\boxed{\Delta < 0}$

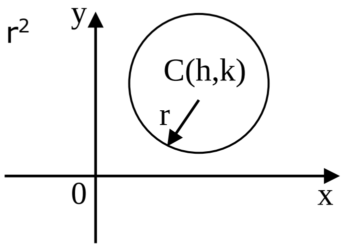


La circunferencia.- Su ecuación general es:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Centro ; (h ; k)

Radio : r



Asimismo tenemos:

La Elipse.- La ecuación general es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

La Hipérbola.- Su ecuación general es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Las ecuaciones de grado superior que se pueden presentar es:

(I) Recta y Circunferencia

$$\begin{cases} x + y = C_1 \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

A los más hay 2 soluciones reales.

(II) Elipse y Hipérbole

$$\begin{cases} \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{(x-h)^2}{m^2} + \dfrac{(y-k)^2}{n^2} = 1 \end{cases}$$

A lo más hay 4 soluciones reales. Entre otras combinaciones.

DESIGUALDADES
INECUACIONES DE 1° y 2° GRADO

DESIGUALDADES

Son relaciones de comparación entre dos o más cantidades reales de diferente valor.

Ejemplo; si:

La edad de Juan es: 20 años

La edad de Pedro es :30 años

La edad de Luis es: 50 años

Se tendrá las siguientes relaciones

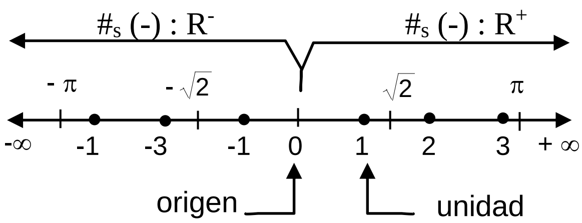
1º.- La edad de Juan es menor que la edad de Pedro.

2º.- La edad de Luis, es mayor que la edad de Pedro.

3º.- La edad de Juan es menor que la edad de Luis.

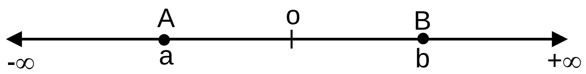
Intuitivamente estamos comparando magnitudes reales de una misma especie. Las desigualdades solo se verifican en el campo de los números reales que asociado a la recta real podemos observar:

RECTA NUMÉRICA REAL



Que para cada número real le corresponde un único punto de la recta real y recíprocamente para cada punto de la recta real, le corresponde un único número real.

La correspondencia bionívoca entre números reales y puntos de una recta real nos ayuda a dar una interpretación geométrica de la relación de orden entre los números reales. Para la gráfica adjunta.



La relación $\boxed{a < b}$ (se lee: a menor que b) significa que al punto A le corresponde el número real "a" y se encuentra a la izquierda del punto B al cual le corresponde el número real "b".

AXIOMAS DE RELACIÓN DE ORDEN

0_1: Orden de Tricotomia.- $\forall$ a, b $\in$ R se cumple una y solo una de las siguientes posibilidades.

$$\boxed{a < b \quad \vee \quad a = b \quad \vee \quad b < a}$$

Ejm:

Dado los números reales: -6; 3; -3 y 4; se cumple que:

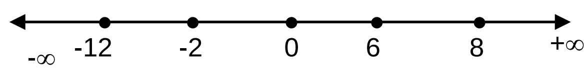
a) $-6 < -3$ b) $3 < 4$ c) $-6 < 4$

d) $-3 < 4$

0_2 : Orden Transitivo.- $\forall$ a, b, c $\in$ R

Si : $\boxed{a < b \ \wedge \ b < c \ \Rightarrow \ a < c}$

Ejm: En la recta real:



$-12 < -2 \ \wedge \ -2 < 8 \ \Rightarrow \ -12 < 8$

0_3 : Orden de la Monotonía.-

$\forall$ a, b, c $\in$ R

i) Ley aditiva

Si : $\boxed{a < b \ \Rightarrow \ a + c < b + c}$

ii) Ley Multiplicativa

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si : } c \in R^{+} \wedge a < b \Rightarrow a\,c < b\,c \\ \\ \text{Si : } c \in R^{-} \wedge a < b \Rightarrow b\,c < a\,c \end{array}}$$

RELACIONES MATEMÁTICAS QUE EXPRESAN DESIGUALDADES

1.- "a" es menor que "b" (a < b)

$$\boxed{a < b \Leftrightarrow a - b < 0}$$

2.- "a" es mayor que "b" (a > b)

$$\boxed{a > b \Leftrightarrow a - b > 0}$$

3.- "a" es mayor o igual que "b" ($a \geq b$)

$$\boxed{a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b}$$

4.- "a" es menor o igual que "b" ($a \leq b$)

$$\boxed{a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b}$$

CLASES DE DESIGUALDADES

De acuerdo a su estructuración matemática, estas pueden ser:

A.- DESIGUALDADES ABSOLUTAS.- Son aquellas que se verifican en el campo de los números reales y a su vez pueden ser numéricas o literales.

Ejemplos:

i) Numéricas	ii) Literales
a) $7 > 0$	a) $x^2 > -2$
b) $9 > 2$	b) $-5 < (x-2)^4$
c) $-\frac{2}{3} \leq 0$	c) $x^6 + y^6 \geq 0$

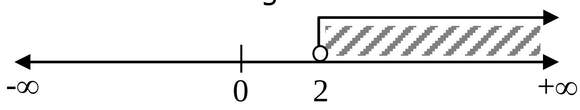
B.- DESIGUALDADES RELATIVAS.- Estas desigualdades se conocen también con el nombre de inecuaciones y se caracterizan por que se verifican para un conjunto de valores denominados conjunto solución y su representación se visualiza en la recta real.

Ejemplos:

a) La inecuación: $4x - 3 > 5$

Se verifica para todo valor de x mayor que dos ($x > 2$)

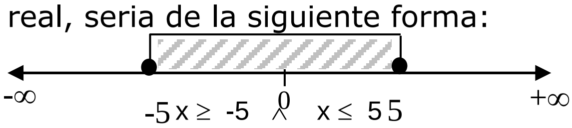
Su representación gráfica en la recta real sería de la siguiente forma:



b) La inecuación: $x^2 - 25 \leq 0$ se verifica para todo x, tal que:

$$X \geq -5 \quad \wedge \quad x \leq 5$$

Su representación gráfica en la recta real, seria de la siguiente forma:



Más adelante analizaremos la solución explícita de los diferentes tipos de inecuaciones que se presentan.

El conjunto solución de una inecuación se expresa mediante intervalos.

INTERVALO.- Es el conjunto de valores x pertenecientes a la recta real, limitado en sus extremos por los elementos a y b, tal que a < b; a y b pueden o no pertenecer al conjunto de valores x.

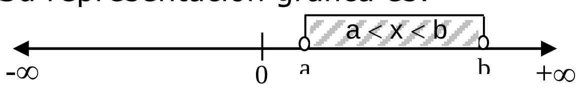
CLASES DE INTERVALO

Intervalo abierto:

i. $< a\,;\,b > = \{ x/a < x < b \quad ; \quad a < b \}$

ii. $]\,a\,;\,b\,[\; = \{ x/a < x < b \quad ; \quad a < b \}$

Su representación gráfica es:

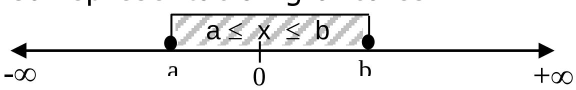


el cual expresa: $x \in < a\,;\,b >$

Intervalo cerrado:

$[\,a\,,\,b\,] = \{ x \,/\, a \leq x \leq b \quad ; \quad a < b \}$

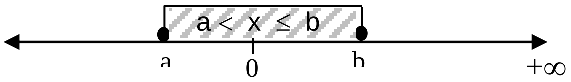
su representación gráfica es:



con lo cual: $x \in [\,a\,;\,b]$

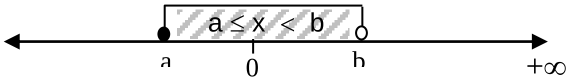
Intervalos Mixtos

a) $< a\ ;\ b\ ] = \{\ x\ /\ a < x \leq b\ \ ;\ \ a < b)$



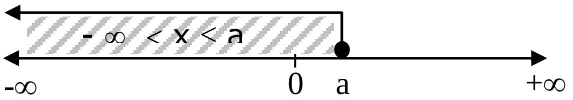
Con lo cual : $x \in\ < a\ ;\ b\ ]$

b) $[a\ ;\ b > \ = \{\ x\ /\ a \leq\ x <\ b\ \ ;\ \ a < b\ \}$



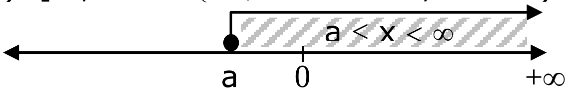
De donde : $x \in [a\ ;\ b >$

c) $<- \infty\ ;\ a\ ] = \{\ x\ /-\infty < x \leq a\ \ ;\ -\infty < a\}$



De donde : $x \in\ < - \infty\ \ ;\ a\ ]$

d) $[a\ ;\ \infty > \ = \{\ x\ /\ a \leq x < \infty\ \ ;\ \ a\ < \infty)$



De donde: $x \in [a\ ;\ \infty >$

PROPIEDADES GENERALES DE LAS DESIGUALDADES

1. Si a los dos miembros de una desigualdad, se suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no se altera.

Si : $\boxed{a > b \Rightarrow a\ \pm\ c > b \pm\ c}$

2. Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por una cantidad positiva el signo de la desigualdad no se altera

Si:

$$a\ >\ b\quad \wedge\quad c > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{i)}\ \ a\,c > b\,c \\ \qquad \wedge \\ \text{ii)}\ \ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

3. Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por una cantidad negativa, el signo de la desigualdad se invierte.

Si:

$$a\ >\ b\quad \wedge\quad c < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{i)}\ \ a\,c < b\,c \\ \qquad \wedge \\ \text{ii)}\ \ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

4. Dos desigualdades de signo contrario se pueden restar miembro a miembro y el signo de la desigualdad resultante es el mismo que hace las veces de minuendo, es decir:

Dado el sistema:

$$\begin{cases} a\ > b\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha) \\ c\ < d\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\beta) \end{cases}$$

Se cumple que:

$$\boxed{a - c\ > b - d\quad \vee\quad c - a < d - b}$$

5. Dos o más desigualdades del mismo sentido se pueden multiplicar o dividir miembro a miembro y el sentido de la desigualdad no se altera, siempre y cuando los miembros de las desigualdades **sean** cantidades positivas.

$\forall\ \ a, b, c, d, \in\ \ R^{+}$

$$\text{Si :} \begin{cases} a\ \ >\ b\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ \quad \wedge \\ c\ \ >\ d\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

Se cumple:

$$\boxed{a\,c > bd\qquad \vee\qquad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}}$$

6. Dos desigualdades de signo contrario y miembros positivos se pueden dividir miembro a miembro; el signo de la desigualdad resultante es el

mismo que el signo de la desigualdad que hace las veces de dividendo.
Es decir:
$\forall$ a, b, c, d, $\in$ R^+

$$\text{Si :}\begin{cases} a > b \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1) \\ \wedge \\ c < d \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2) \end{cases}$$

Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad \vee \quad a\,\frac{c}{a} < \frac{d}{b}}$$

7. Si a los dos miembros de una desigualdad se eleva a una potencia impar o se extrae raíces de índice impar, el sentido de la desigualdad no se altera. Es decir:
Si:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} \text{i)}\ a^{2n+1} > b^{2n+1} \\ \qquad\vee \\ \text{ii)}\ \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b} \end{cases}$$

$n \in z^+$

8. Si a los dos miembros de una desigualdad de términos negativos se eleva a un exponente par, el signo de la desigualdad se invierte, es decir:
$\forall$ a, b $\in$ R^-

$$\begin{cases} \text{i)}\ \text{Si } a > b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n} \\ \text{ii)}\ \text{Si } a < b \Rightarrow a^{2n} > b^{2n} \end{cases}$$

9. Si: a $\in$ R, tal que:

$$\boxed{a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0}$$

10. a, b $\in$ R y son del mismo signo, entonces:

$$\begin{cases} a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \end{cases}$$

DEMOSTRACIONES SOBRE DESIGUALDADES

01) Siendo:
$$\begin{cases} a \neq b \;\ldots\ldots\ldots\; (1) \\ a > 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (2) \\ b > 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (3) \end{cases}$$

demostrar que : $a^3 + b^3 > a^2\,b + a\,b^2$

DEMOSTRACIÓN

De (1) : $a \neq b \rightarrow a - b \neq 0$
Entonces : $(a - b)^2 > 0$

Desarrollando, se obtiene:
$a^2 - 2\,a\,b + b^2 > 0$
ó $a^2 - a\,b + b^2 > ab$ .... (α)
De (2) y (3): $a + b > 0$ .... (β)
Multiplicando los dos miembros de (α) por (a + b), se tendría:
$(a^2 - a\,b + b^2)\,(a + b) > ab\,(a + b)$
$\therefore a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$ (L.q.q.q)

02) Si : a y b son diferentes y positivos, demostrar que:

$$\frac{a+b}{2} > \frac{2\,ab}{a+b}$$

DEMOSTRACIÓN

Dado que : $a \neq b$; se cumple que:
$(a - b)^2 > 0$
Desarrollando: $a^2 - 2\,ab + b^2 > 0$
Sumando; 4 ab a los dos miembros de la desigualdad, se tendría:
$a^2 + 2\,a\,b + b^2 > 4\,a\,b$
$(a + b)^2 > 4\,a\,b$

Como; 2 (a + b) > 0, entonces se tendría al dividir:

$$\frac{(a+b)^2}{2\,(a+b)} > \frac{4\,a\,b}{2\,(a+b)}$$

$$\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{(a+b)}$$

(L.q.q.q)

EJERCICIOS

01.- Si; a, b $\in R^+$; $a \neq b$; demostrar que:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

02.- Si: a, b, c $\in R^+$, demostrar que :

$$(a + b + c)^2 > a^2 + b^2 + c^2$$

03.- Si; a, b, c $\in R^+$; $a \neq b \neq c$

demostrar que:

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc$$

04.- Si; $a \neq b \neq c \;\wedge\; \in R^+$

demostrar que:

$$(a + b + c)^2 < 3\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

05.- Si; $a \neq b \wedge \in R^+$, demostrar que:

$$(a^3 + b^3)\,(a + b) > (a^2 + b^2)^2$$

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son todas aquellas inecuaciones que al reducirse adoptan las formas:

$ax + b > 0$ $\vee$	$ax + b < 0$
$ax + b \geq 0$ $\vee$	$ax + b \leq 0$

X; es la incógnita y a, b $\in R$ / $a \neq 0$

EJERCICIOS RESUELTOS

01. Resolver : $ax + b \geq 0$; a, b $\in R^+$

Solución

Resolver una inecuación de este tipo es similar a resolver una ecuación de primer grado, solo hay que tener en cuenta las propiedades generales de las desigualdades, en efecto:

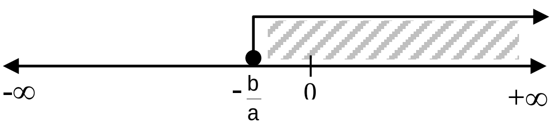
Transponiendo b al segundo miembro:

$$ax \geq -b$$

Dado que a $\in R^+$, es decir: $a > 0$

$$x \geq -\frac{b}{a}$$

graficando en la recta real:



vemos que : $x \in [\,-\frac{b}{a}\,;\ \infty >$

02. Resolver:

$$\frac{3x-2}{2} - \frac{5x-3}{3} < \frac{x-1}{12}$$

Solución:

Siendo el m.c.m. (2, 3, 12) = 12; un número positivo, el signo de la desigualdad no se altera al efectuar las operaciones indicadas.

$$6\,(3x - 2) - 4\,(5x - 3) < x - 1$$
$$18x - 12 - 20x + 12 < x - 1$$
$$-2x < x - 1$$
$$-3x < -1$$

multiplicando por (-1) , obtenemos :

$$3x > 1$$

$$\therefore\ x > \frac{1}{3} \ \rightarrow\ x \in \ < \frac{1}{3}; \infty >$$

03. Resolver:

$(x+1)^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2 \leq 3(x+1)(x-1)$

Solución:

Efectuando las operaciones indicadas obtenemos:

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x + $$
$$+ 4 \leq 3x^2 - 3$$

Simplificando:

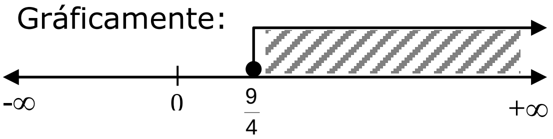
$$3x^2 - 4x + 6 \leq 3\,x^2 - 3$$

$$-\,4\,x \;\leq -\,9$$

multiplicando por (-1)

$$4\,x \geq 9 \rightarrow x \geq \frac{9}{4}$$

Gráficamente:



$$\therefore \quad x \in \left[\, \frac{9}{4}\,;\, \infty \right> \quad \text{Rpta.}$$

EJERCICIOS

Resolver:

a) $(2x - 1)^2 + (x + 2)^2 \geq 5\,(x - 3)\,(x + 2)$

Rpta. ....

b) $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2 < 3\,(x + 4)^2$

Rpta. ....

c) $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 \leq (2\,x + 3)\,(3\,x + 2)$

Rpta.............

d) $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{3x-2}{3} \geq \dfrac{4x-1}{5}$

Rpta.- ....

e) $(2x + 1)^3 - (2\,x - 1)^3 \geq \geq (x + 1)\,(x - 1)$

Rpta.- ....

f) $(5\,x + 3)\,(3\,x - 1) + (x + 2)^2 \geq \geq (4\,x - 3)^2$

Rpta.- ....

g) $\dfrac{2\,x-3}{4} - \dfrac{3\,x-2}{5} - \dfrac{5\,x-1}{2} < 1$

Rpta.-.............

04. Resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2\,x-3}{4} - \dfrac{3\,x-1}{2} \geq 1 \;\ldots\ldots.\; (\alpha) \\[2mm] \dfrac{5x-3}{3} - \dfrac{8\,x-1}{4} \leq -1 \;\ldots\ldots.\; (\beta) \end{cases}$$

Solución:

Resolviendo cada inecuación:

De (α): m.c.m. (4, 2, 1) = 4

$$2\,x - 3 - 2\,(3\,x - 1) \geq 4$$

$$2\,x - 3 - 6\,x + 2 \geq 4$$

$$-\,4\,x \geq 5$$

$$\therefore \quad x \leq -\frac{5}{4}$$

De (β): m.c.m. (3, 4, 1) = 12

$$4\,(5\,x - 3) - 3\,(8\,x - 1) \leq -12$$

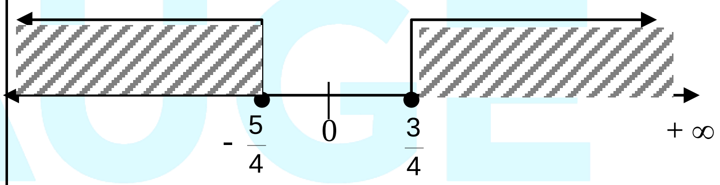
$$20\,x - 12 - 24\,x + 3 \leq -12$$

$$-\,4\,x \leq -3$$

$$4\,x \geq 3$$

$$\therefore \quad x \geq \frac{3}{4}$$

En la recta real:



Como no hay intersección de las soluciones de (α) y (β) $\Rightarrow$ $\boxed{x \in \phi}$

EJERCICIOS

Resolver los sistemas:

a) $\begin{cases} (3x - 1)^2 > (2x + 3)^2 + 5\,(x^2 - 1) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1) \\ (2x - 1)^2 + (3x - 9) < 13\,(x^2 + 2x - 3) \ldots \;(2) \end{cases}$

Rpta.- ....

b) $\begin{cases} (x+2)^3 \geq (x+1)\,(x+2)\,(x+3) \;\ldots.(\alpha) \\ (x-3)^3 \geq (x-3)\;(x-2)\;(x-4) \;\ldots.(\beta) \end{cases}$

Rpta.- ....

c) $\begin{cases} \dfrac{5\,x-3}{2} - \dfrac{3\,x-1}{4} - \dfrac{x-2}{6} < 1 \;\ldots\ldots.\; (\alpha) \\[2mm] \dfrac{4\,x-3}{3} - \dfrac{2\,x-5}{4} - \dfrac{3x-2}{12} > 1 \;\ldots\ldots.(\beta) \end{cases}$

Rpta.-...............

INECUACIONES SIMULTÁNEAS DEL PRIMER GRADO

En la resolución de inecuaciones simultáneas con dos incógnitas podemos aplicar cualquiera de las siguientes reglas.

1º.- Se toman dos inecuaciones de sentido contrario despejando en cada una de ellas la misma incógnita, luego esta incógnita se elimina aplicando el principio de transitividad.

2º.- Se puede eliminar una incógnita restando dos inecuaciones de sentido contrario, habiendo homogenizado previamente los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar.

Ejemplo.- Si "x" e "y" son cantidades enteras y positivas, calcular: $(x^2 + y^2)$, al resolver el sistema.

$$\begin{cases} 5x - 3y > 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ 2x + y < 11 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \\ \quad y > 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3) \end{cases}$$

Solución

Multiplicando la inecuación (1) por 2 y la inecuación (2) por 5, obtenemos:

$$\begin{cases} 10x - 6y > 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha) \\ 10x + 5y < 55 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\beta) \end{cases}$$

restando miembro a miembro (α) y (β)

$$10x - 6y - 10x - 5y > 4 - 55$$

$$-11y > -51$$

$$y < \frac{51}{11}$$

Dado que : $3 < y < \frac{51}{11} = 4,\overset{\frown}{63} \rightarrow \boxed{y = 4}$

Reemplazando y = 4, en el sistema:

$$\begin{cases} 5x - 3y > 2 \\ 2x + y \leq 11 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > 2,8 \\ \wedge \\ x < 3,5 \end{cases}$$

Aquí observamos que: $\boxed{x = 3}$

$\therefore \boxed{x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25}$ Rpta.

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son todas aquellas inecuaciones que al reducirse adopta la forma canónica

$a x^2 + bx + c > 0$	$\vee$ $ax^2 + bx + c < 0$
$a x^2 + bx + c \geq 0$	$\vee$ $ax^2 + bx + c \leq 0$

Donde x, es la incógnita y ;

$a, b, c \in R \,/\, a \neq 0$

Solución

Método del discriminante :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$a > 0$

Caso I: $ax^2 + bx + c < 0$

Caso II: $ax^2 + bx + c > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

Caso I		Caso II
$\Delta > 0$	$X \in \langle x_1 ; x_2\rangle$	$X \in \langle -\infty, x_1\rangle \cup \langle x_2, \infty\rangle$
$\Delta = 0$	$X \in \phi$	$X \in R - \{x_1 = x_2\}$
$\Delta < 0$	$X \in \phi$	$X \in R \vee X \in \langle -\infty, \infty\rangle$

$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $(x_1 < x_2)$

$a > 0$

Caso III: $ax^2 + bx + c \leq 0$

Caso IV: $ax^2 + bx + c \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

Caso III		Caso IV
$\Delta > 0$	$X \in [x_1 ; x_2]$	$X \in \langle -\infty, x_1\rangle \cup \langle x_2, \infty\rangle$
$\Delta = 0$	$X = x_1 = x_2$	$X \in R$
$\Delta < 0$	$X \in \phi$	$X \in R$

$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $(x_1 < x_2)$

EJERCICIOS

01.- Resolver:

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 12x > (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Solución:

Teniendo en cuenta la identidad:

$$\boxed{(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc}$$

La inecuación dada, se transforma en :

$X^3 + 6x^2 + 11x + 6 + 12x > x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Simplificando; obtenemos:

$12x^2 + 12x + 12 > 0$

ó

$x^2 + x + 1 > 0$ $\quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

De aquí vemos que:

$\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) \rightarrow \Delta = -3$

Como : $\boxed{\Delta < 0 \Rightarrow x \in R}$ (Caso II)

INECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Son aquellas inecuaciones que al ser reducidas adoptan cualquiera de las siguientes formas:

$$\begin{array}{l} a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n > 0 \\ a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \geq 0 \\ a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n < 0 \\ a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \leq 0 \end{array}$$

Donde: x, es la incógnita y $n \in N / n \geq 3$

Además: $\{a_o; a_1; a_2 \ldots ; a_n\} \in R / a_0 \neq 0$

SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE LOS PUNTOS DE CORTE

Pasos que deben efectuarse:

1º) Verificar que $a_0 > 0$

2º) Todos los términos de la inecuación deben estar en el primer miembro.

3º) Se factoriza la expresión del primer miembro.

4º) Cada factor se iguala a cero, obteniendo los puntos de ente, que son los valores que asume la incógnita.

5º) Se llevan los puntos de corte en forma ordenada a la recta numérica

6º) Cada zona determinada por dos puntos de corte consecutivos, se señalan alternadamente de derecha a izquierda con signos (+) $\wedge$ (-). Se inicia siempre con el signo más.

7º) Si la inecuación es de la forma: $P(x) > 0 \vee P(x) \geq 0$, con el coeficiente principal positivo, el intervalo solución está representado por las zonas (+).

8º) Si la inecuación es de la forma: $P(x) < 0 \vee P(x) \leq 0$, con el coeficiente principal positivo, el intervalo solución está representado por las zonas (-).

Nota. Este método también es aplicable para inecuaciones de segundo grado.

EJERCICIO

Resolver:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$$

Solución

Factorizando por divisores binomios. Se obtiene:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) \geq 0 \xrightarrow{P.C.} \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

llevando los puntos de corte (P.C.) a la recta real; tendríamos que: el conjunto solución es:

$x \in [1, 2] \cup [3, \infty >$

INECUACIONES EXPONENCIALES INECUACIONES IRRACIONALES

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real x, es el número no negativo denotado por $|x|$ y definido por:

$$|x| = \begin{cases} X & ; \text{si } x > 0 \\ 0 & ; \text{si } x = 0 \\ -X & ; \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

a) $|5| = 5$ d) $|-2| = 2$

b) $|-5| = -(-5) = 5$ e) $|-3| = 3$

c) $|0| = 0$ f) $|\sqrt{3} - 3| = 3 - \sqrt{3}$

De los ejemplos podemos observar que:

1.- $\forall x \in R \; ; \; |x| \geq 0$

2.- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3.- $|x| = |-x|$

PROPIEDADES

$\forall x, y \in R$; se cumple:

a) $|-x| = |x|$

b) $|xy| = |x| \, |y|$

c) $|x|^2 = x^2 \vee |x^2| = x^2$

d) $\sqrt{x^2} = |x|$

e) $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

f) $|x - y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \leq 0$

g) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$; $y \neq 0$

h) $|x| + |y| \geq 2\sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

En resolución de ecuaciones con valor absoluto, debemos tener en cuenta lo siguiente:

1.- Si $x \in R$, entonces $|x|$ es el número real no – negativo definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & ; \text{si } x \geq 0 \\ -x & ; \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2.- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3.- $|x| = |b| \Leftrightarrow x = b$ ó $x = -b$

4.- $|x| = b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge [x = b$ ó $x = -b]$

EJERCICIOS

01. Hallar el conjunto solución en la inecuación:

$$|x + 2| \, (x^4 - 1) = 0$$

Solución:

Factorizando, se tendría:

$$|x + 2| \, (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) = 0$$

igualando cada factor a cero.

a) $|x + 2| = 0 \longrightarrow x = -2$

b) $x^2 + 1 = 0 \longrightarrow x = i \vee x = -i$

c) $x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1$

d) $x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$

Nota.- $\boxed{i = \sqrt{-1} \; ; \text{ tal que: } i^2 = -1}$

Como $x \in R$; $i \wedge -i$ no son parte de la solución:

$\therefore$ C. S. = $\{-2, 1, -1\}$

02. Resolver:

$$|x^2 - x - 3| = |x - 3|$$

Solución:

Para este caso, se cumple la propiedad:

$$\boxed{|x| = |b| \Leftrightarrow x = b \quad ó \quad x = -b}$$

Para nuestro caso:

$$\begin{cases} X^2 - x - 3 = x - 3 \text{ .... } (\alpha) \\ X^2 - x - 3 = -(x-3) \text{ .... } (\beta) \end{cases}$$

De .... (α)

$x^2 - x - 3 = x - 3 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$\therefore \boxed{x = 0} \vee \boxed{x = 2}$

De .... (β)

$X^2 - x - 3 = -x + 3 \rightarrow x^2 = 6$

$\therefore \boxed{x = \sqrt{6}} \vee \boxed{x = -\sqrt{6}}$

$\therefore$ C. S. $= \{0, 2, \sqrt{6}; -\sqrt{6}\}$

03. Hallar el conjunto solución en la inecuación:

$$|2x - 1| = x + 2$$

Solución:

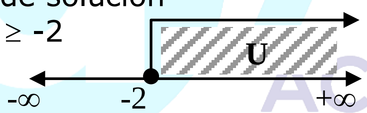
Desde que:

$$\boxed{|x| = b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge [x = b \vee x = -b]}$$

Se tendría:

1º.- Universo de solución

$x + 2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$



$x \in [-2; \infty>$

2º.- Con lo cual:

$2x - 1 = x + 2 \quad \vee \quad 2x - 1 = -x - 2$

$\boxed{x = 3} \in U \quad \vee \quad \boxed{x = -\frac{1}{3}} \in$ universo

$\therefore$ C. S. $= \{-\frac{1}{3}, 3\}$

04. Resolver:

$$||x - 3| - 2| = 3$$

Solución:

1.- Haciendo ; $|x - 3| = a$ .... (α)

donde $a > 0$; se tendría:

$|a - 2| = 3 \rightarrow a - 2 = 3 \vee a - 2 = -3$

$\boxed{a = 5} \quad \vee \quad \boxed{a = -1}$ (No)

2.- En (α), dado que: $a > 0$

$|x - 3| = 5 \rightarrow x - 3 = 5 \vee x - 3 = -5$

$x = 8 \quad \vee \quad x = -2$

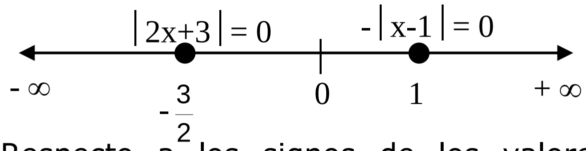
$\therefore$ C.S. $= \{8; -2\}$

05. Resolver:

$$-|x - 1| + |2x + 3| = 5$$

Solución:

Igualando cada valor absoluto a cero determinamos los puntos de corte en la recta real:



Respecto a los signos de los valores absolutos en cada intervalo se tendría:

a) $< -\infty; -\frac{3}{2}]$: (-) (-)

b) $< -\frac{3}{2}; 1]$: (+) (-)

c) $< 1; \infty >$: (+) (+)

Analizando en cada intervalo:

a) $x \in < -\infty; -\frac{3}{2}] : -|2x + 3| + |x-1| = 5$

$-2x - 3 + x - 1 = 5$

$x = -9$

Como ; $-9 \in < -\infty; -\frac{3}{2}] \Rightarrow \boxed{x = -9}$; es Solución.

b) $x \in < -\frac{3}{2}; 1] : |2x + 3| + |x-1| = 5$

$2x + 3 + x - 1 = 5$

$3x = 3$

Como ; $1 \in <-\frac{3}{2}; 1] \Rightarrow \boxed{x = 1}$

es solución.

c) $x \in <1; \infty > : |2x + 3| - |x-1| = 5$

$2x + 3 - x + 1 = 5$

Como ; $1 \notin <1; \infty> \Rightarrow \boxed{x = 1}$

no es solución, para este intervalo.

De (a) y (b) C.S. $= \{-9; 1\}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

RESOLVER:

01) $[5X - 3] = 7$ Rpta: $\{2; -\frac{4}{5}\}$

02) $|2x^2 - x - 8| = 7$ Rpta. $\{3; -\frac{5}{2}\}$

03) $|x^2 - 1| = 0$ Rpta. $\{-1; 1\}$

04) $|3x - 2| = |2x + 3|$ Rpta. $\{5; -\frac{1}{5}\}$

05) $||x-2|-1| = |x-2|$ Rpta. $\{\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\}$

06) $|2x^2 - x - 3| = 3$

07) $|3x + 5| = |2x - 3|$

08) $\left|\frac{x-2}{x+3}\right| = |x|$

09) $\left|\frac{x^2-x-2}{x-1}\right| = 3$

10) $|x+6| + |x-2| = 8$

11) $|x-3| + |x-1| + |x| = 4$

12) $|5x - 3| = -2x + 4$

13) $|3x - 2| = x + 6$

14) $|x^2 - x - 3| = |x^2 - 6|$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Las inecuaciones con valor absoluto se resuelven teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

$\forall$ x ; a $\in$ R; se cumple.

I.-	$|x| < |a| \Leftrightarrow (x + a)(x - a) < 0$ $|x| \le |a| \Leftrightarrow (x + a)(x - a) \le 0$
II.-	$|x| > |a| \Leftrightarrow (x + a)(x - a) > 0$ $|x| \ge |a| \Leftrightarrow (x + a)(x - a) \ge 0$
III.-	$|x| < |a| \Leftrightarrow a > 0 \wedge [-a < x < a]$ $|x| \le a \Leftrightarrow a \ge 0 \wedge [-a \le x \le a]$
IV.-	$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$ $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a \vee x \ge a$

EJERCICIOS

01. Resolver:

$|3x - 2| < |2x - 1|$

Solución:

Dado que :

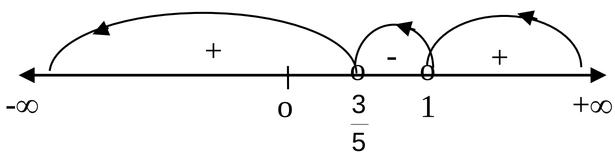
$$\boxed{|a| < |b| \Leftrightarrow (a + b)(a - b) < 0}$$

para la inecuación dada, se tendría:

$(3x - 2 + 2x - 1)(3x - 2 - 2x + 1) < 0$

$$(5x - 3)(x - 1) < 0 \xrightarrow{\text{P.C.}} \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ \vee \\ x = 1 \end{cases}$$

de la recta real:



Vemos que: $x \in \langle \frac{3}{5} ; 1 \rangle$ (Rpta)

02. Resolver:

$|x^2 - x| > x - 1$

Solución:

Desde que :

$$\boxed{|a| > b \Leftrightarrow a < -b \vee a > b}$$

La inecuación dada se transforma en:

$x^2 - x < -(x - 1) \vee x^2 - x > x - 1$

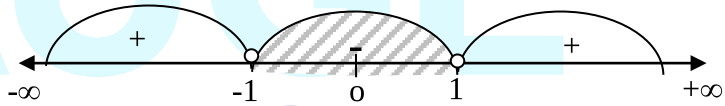
Resolviendo cada una de las inecuaciones:

1º.- $x^2 - x < -x + 1$

$x^2 - 1 < 0$

$$(x + 1)(x - 1) < 0 \xrightarrow{\text{P.C.}} \begin{cases} x = -1 \\ \vee \\ x = 1 \end{cases}$$

en la recta real:

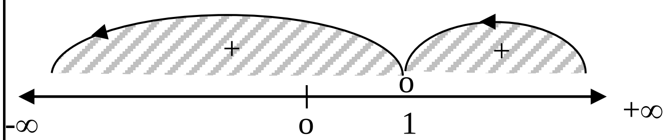


Vemos que: $x \in \langle -1 ; 1 \rangle$ ..... (α)

2º.- $x^2 - x > x - 1$

$$(x - 1)^2 > 0 \xrightarrow{\text{P.C.}} \begin{cases} x = 1 \\ \\ x = 1 \end{cases}$$

En la recta real:



Vemos que $x \in \langle -\infty ; 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$... ($\beta$)

Dado que la solución es (α) U (β):

$x \in \langle -\infty ; 1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$ ó $x \in R - \{1\}$

03. Resolver:

$|3x - 2| < 5$

Solución:

De acuerdo a las propiedades establecidas como: $5 > 0$; entonces:

$-5 < 3x - 2 < 5$

sumando "2" a todos los miembros

$-5 + 2 < 3x - 2 + 2 < 5 + 2$

$-3 < 3x < 7$

dividiendo entre 3:

$$-1 < x < \frac{7}{3}$$

$$\therefore\ x \in \langle -1\ ;\ \frac{7}{3} \rangle$$

04. Resolver:

$$|2x + 5| \geq |5x - 2|$$

Solución:

Como: $\boxed{|a| \geq |b| \Rightarrow (a + b)(a - b) \geq 0}$

en la inecuación dada se tendría:

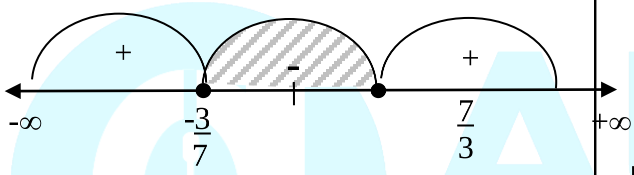
$(2x + 5 + 5x - 2)(2x + 5 - 5x + 2) \geq 0$

$(7x + 3)(-3x + 7) \geq 0$

cambiando el signo de x

$$(7x + 3)(3x - 7) \leq 0 \xrightarrow{\text{P.C.}} \begin{cases} x = -\frac{3}{7} \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

en la recta



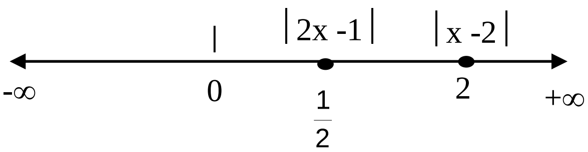
Vemos que: $x \in [-\frac{3}{7}\ ;\ \frac{7}{3}]$

05. Resolver:

$|x - 2| - |2x - 1| \leq 2$

Solución:

Igualando cada valor absoluto a cero para determinar los puntos de corte en la recta real; vemos que:



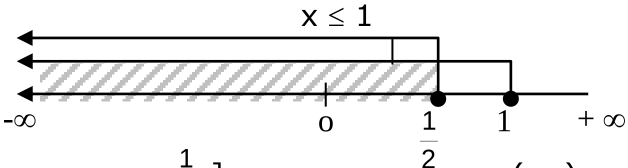
La inecuación a analizar es:

$-|2x - 1| + |x - 2| \leq 2$

a) Para el intervalo: $\langle -\infty;\ \frac{1}{2}]$; los signos de los valores absolutos son: (- , -) de donde:

$2x - 1 - x + 2 \leq 2$

$x \leq 1$



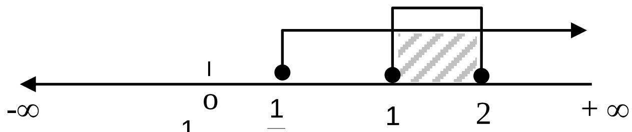
$x \in \langle -\infty\ ;\ \frac{1}{2}]$ .... (α)

b) Para el intervalo $\langle \frac{1}{2}\ ;\ 2]$, lls signos de los valores absolutos son (+ , -); de donde:

$-2x + 1 - x + 2 \leq 2$

$-3x \leq -1$

$x \geq \frac{1}{3}$



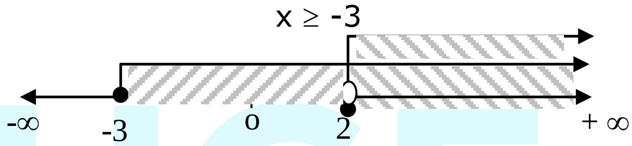
$x \in \langle \frac{1}{2}\ ;\ 2]$............... (ß)

c) Para el intervalo : $\langle 2;\ \infty \rangle$: los signos de los valores absolutos son (+ , +) de donde:

$-2x + 1 + x - 2 \leq 2$

$-x \leq 3$

$x \geq -3$



$x \in \langle 2\ ;\ \infty]$ .... (θ)

La solución de la inecuación propuesta estará dado por (α) U (β) U (θ)

$\langle -\infty\ ;\ -\frac{1}{2}]\ \cup \langle \frac{1}{2},\ 2]\ \cup \langle 2\ ;\ \infty\rangle = \langle -\infty\ ;\ \infty \rangle$

$\therefore\ \boxed{x \in \mathbb{R}}$ Rpta.

EJERCICIOS

Resolver:

a) $|2x - 7| < 2$

b) $|3x - 1| > 5$

c) $|4x - 3| < |2x - 5|$

d) $|7x - 3| > |5x - 4|$

e) $|3x - 2| < x - 2$

f) $|x + 2| - |x - 3| > 1$

g) $|x + 2| - |x - 3| < 1$

h) $\left|\frac{x}{x - 1}\right| > 1$

i) $|x^2 - 1| < x + 2$

j) $\left|\frac{2x - 1}{3x - 2}\right| < \left|\frac{3x - 2}{2x - 1}\right|$

INECUACIONES EXPONENCIALES

Son aquellas inecuaciones cuya incógnita se encuentra en el exponente y sus criterios de solución son:

I. En toda desigualdad, si las bases son iguales y mayor que la unidad, al comparar los exponentes, el signo de la desigualdad no se invierte, es decir:

	Si la base es mayor que la unidad $(a > 1)$; se cumple:
1º	$a^{P(x)} > a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) > Q(x)$
2º	$a^{P(x)} \geq a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) \geq Q(x)$
3º	$a^{P(x)} < a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) < Q(x)$
4º	$a^{P(x)} \leq a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) \leq Q(x)$

EJERCICIOS

01. Resolver

$$5^{2x-3} - 25^{-x+2} \geq 0$$

Solución:

Expresando la inecuación convenientemente, se tendría:

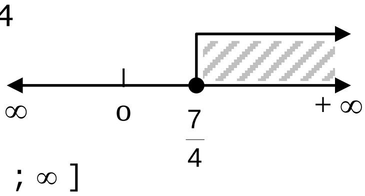
$$5^{2x-3} \geq 25^{-x+2}$$
$$5^{2x-3} \geq 25^{-2x+4}$$

como; la base es mayor que la unidad, se cumple que:

$2x - 3 \geq -2x + 4$

$4x \geq 7$

$x \geq \frac{7}{4}$



$\therefore \; x \in \left[\frac{7}{4} ; \infty\right]$

02. En que intervalo se satisface la desigualdad.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} > \sqrt{2^{\frac{x}{2}-1}}$$

Solución:

Expresando en base 2

$$2^{-|x-1|} > 2^{\frac{x}{4}-\frac{1}{2}}$$

como la base es mayor que la unidad:

$$-|x-1| > \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$$

ó: $$|x-1| < \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$

recordando:

$$\boxed{|a| < b \Leftrightarrow b > 0 \wedge [-b < a < b]}$$

se tendría:

1º.- Universo de solución

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{4} > 0 \rightarrow -\frac{x}{4} > -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x < 2}$$

2º.- De otro lado:

$$-\frac{1}{2} + \frac{x}{4} < x - 1 < \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$

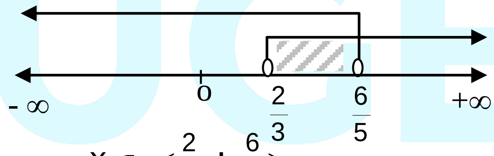
$$-2 + x < 4x - 4 < 2 - x$$

resolviendo por partes:

i) $4x - 4 > x - 2$ ii) $4x - 4 < 2 - x$

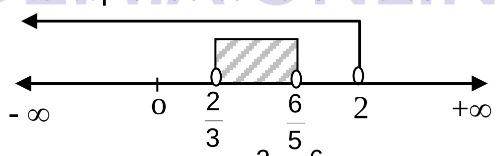
$3x > 2$ $5x < 6$

$x > \frac{2}{3}$ $x < \frac{6}{5}$



$$x \in \left\langle \frac{2}{3} ; \frac{6}{5} \right\rangle$$

interceptando con el universo:



Rpta. C.S.; $x \in \left\langle \frac{2}{3} ; \frac{6}{5} \right\rangle$

II. En toda desigualdad si las bases son iguales y su valor está comprendido entre cero y uno $(0 < base < 1)$ al comparar los exponentes el signo de la desigualdad se invierte, es decir:

	Si la base está comprendida entre cero y la unidad $(0 < a < 1)$; se cumple.
1º	$a^{P(x)} > a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) < Q(x)$
2º	$a^{P(x)} \geq a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) \leq Q(x)$
3º	$a^{P(x)} < a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) > Q(x)$
4º	$a^{P(x)} \leq a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) \geq Q(x)$

EJERCICIOS

01. Resolver

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-3|} < \frac{1}{8}$$

solución:

Colocando en base $\left(\frac{1}{2}\right)$, se tendría:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-3|} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

Como la base está comprendida entre cero y la unidad.

$$|x - 3| > 3$$

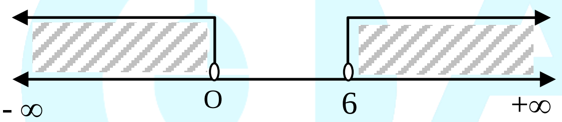
recordemos que :

$$\boxed{|a| > b \Leftrightarrow a < -b \vee a > b}$$

con lo cual:

$$x - 3 < -3 \quad \vee \quad x - 3 > 3$$
$$x < 0 \quad \vee \quad x > 6$$

Gráficamente:



Rpta: $x \in \langle -\infty , 0 \rangle \cup \langle 6 ; \infty \rangle$

02. Resolver

$$\sqrt[x-6]{(0,5)^{x+6}} \leq \sqrt[x+6]{(0,5)^{x-6}}$$

Solución:

Transformando los radicales a exponentes fraccionarios, se tiene:

$$(0,5)^{\frac{x+6}{x-6}} \leq (0,5)^{\frac{x-6}{x+6}}$$

como la base está comprendido entre cero y la unidad, al comparar los exponentes, el signo de la desigualdad varía, es decir:

$$\frac{x+6}{x-6} \geq \frac{x-6}{x+6}$$

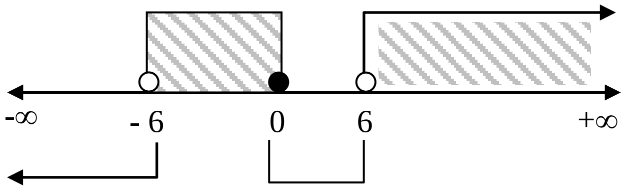
como el segundo miembro debe ser cero:

$$\frac{x+6}{x-6} - \frac{x-6}{x+6} \geq 0$$

efectuando las operaciones indicadas, se obtiene:

$$\frac{x}{(x+6)(x-6)} \geq 0 \xrightarrow{P.C} \begin{cases} N \left[\, x = 0 \right. \\ D \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -6 \end{array}\right. \end{cases}$$

Graficando en la recta real:



Rpta. $x \in \langle -6 ; 0] \cup \langle 6 ; \infty \rangle$

INECUACIONES IRRACIONALES

Son aquellas inecuaciones cuyas incógnitas se encuentran afectadas por radicales o exponentes fraccionarios. De otro lado como las inecuaciones solo se verifican en el campo de los números reales, se cumple el siguiente principio fundamental.

Principio fundamental.- En toda inecuación irracional de índice par, las cantidades subradicales deben ser mayores o iguales a cero y esto nos determina el universo dentro del cual se resuelve la inecuación dada.

Ejemplo.- Dada la inecuación

$$\sqrt[2n]{f(x)} + \sqrt[2n+1]{g(x)} < 0$$

$n \in z^{+}$

entonces la inecuación se resuelve para valores que estén comprendidas dentro de las soluciones de : $f(x) \geq 0$

Existen diversos casos de inecuaciones irracionales presentaremos algunos de ellos y su forma de resolverlos.

01. Resolver

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{8-x} > 0$$

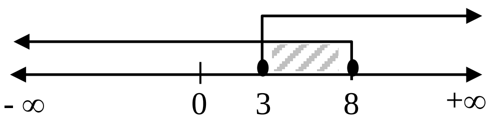
Solución

El conjunto solución a esta inecuación está determinado por la intersección de los universos de cada radical, es decir;

$U_1 : X - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

$U_2 : 8 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 8$

Conjunto solución $U_1 \cap U_2$



Rpta: $x \in [\, 3 \; ; 8 \,]$

02. Resolver:

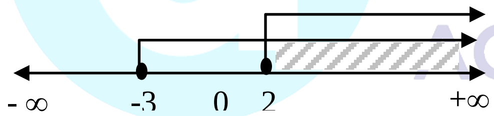
$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} \leq 5$$

Solución

1º.- Determinación del universo

$x + 3 \geq 0 \;\wedge\; x - 2 \geq 0$

$x \geq -3 \;\wedge\; x \geq 2$



Universo $x \in [\, 2 \,, \infty >$

2º- Pasando un radical al segundo miembro.

$$\sqrt{x+3} \leq 5 - \sqrt{x-2}$$

3º.- Elevando al cuadrado los dos miembros de la inecuación.

$X + 3 \leq 25 - 10\sqrt{x-2} + x - 2$

$10\sqrt{x-2} \leq 20$

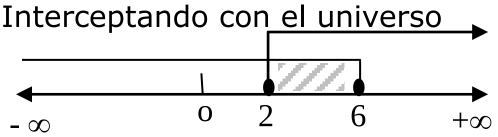
$\sqrt{x-2} \leq 2$

4º.- Elevando al cuadrado

$x - 2 \leq 4$

$x \leq 6$

5º.- Interceptando con el universo



Rpta. $x \in [\, 2, 6 \,]$

OBSERVACIÓN

Algunas inecuaciones irracionales de índice par se transforman en sistemas, como las que mostramos a continuación:

a) Si : $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$, entonces:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (\alpha) \\ \wedge \\ f(x) < g(x) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (\beta) \end{cases}$$

b) Si : $\sqrt[2n]{f(x)} \leq \sqrt[2n]{g(x)}$, entonces:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (\alpha) \\ \wedge \\ f(x) \leq g(x) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (\beta) \end{cases}$$

c) Si : $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}$, entonces:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (\alpha) \\ \wedge \\ f(x) > g(x) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (\beta) \end{cases}$$

d) Si : $\sqrt[2n]{f(x)} \geq \sqrt[2n]{g(x)}$, entonces:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (\alpha) \\ \wedge \\ f(x) \geq g(x) \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (\beta) \end{cases}$$

Ejemplo: Resolver:

$$\sqrt{16 - \frac{1}{x^2}} \geq \sqrt{16 - x}$$

Solución

Para este caso, se cumple:

$$\begin{cases} 16 - x \geq 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1) \\ 16 - \dfrac{1}{x^2} \geq 16 - x \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (2) \end{cases}$$

De .... (1)

$16 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 16$

$x \in <-\infty \; ; 16 \,] \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (\alpha)$

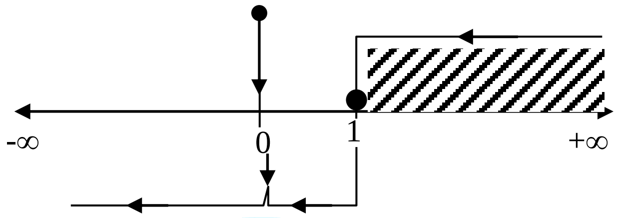
De .... (2)

$$16 - \frac{1}{x^2} \geq 16 - x \rightarrow \frac{x^3 - 1}{x^2} \geq 0$$

factorizando el numerador:

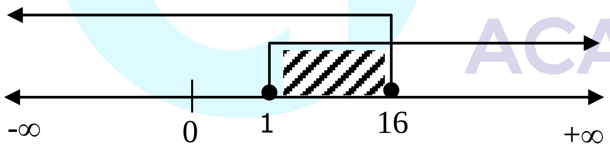
$$\frac{(x-1)\,(x^2+x+1)}{x^2} \geq 0 \xrightarrow{P.C} \begin{cases} N: & x = 1 \\ D: & \{\, x = 0 \end{cases}$$

Graficando en la recta real:



$x \in [\,1\,;\ \infty >$ .... (ß)

Interceptando (α) y (β) obtenemos la solución final



Rpta. $x \in$ **[1 ; 16]**

FUNCIONES DOMINIOS
FUNCIONES ESPECIALES
GRÁFICAS DE FUNCIONES

DEFINICIONES BÁSICAS

PAR ORDENADO.- Es un ente matemático formado por dos elementos, denotado por (a ; b), donde "a" es la primera componente y "b" es la segunda componente. En términos de conjunto de el par ordenado (a ; b) se define como:

$$(a; b) = \{ \{a\} ; \{a ; b\} \}$$

Igualdad de pares ordenados.- Dos pares ordenados son iguales si y solo si sus primeras y segundas componentes son iguales respectivamente, es decir:

$$(a; b) = (c ; d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Ejemplo.-1.- Si los pares ordenadas (2x + 3y; 7x - 2y), (13;8) son iguales, hallar el valor de (x-y)

Solución :
Ya que los pares ordenados son iguales, por definición se cumple.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 7x - 2y = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por determinantes.

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-26-24}{-4-21} = 2$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{16-91}{-4-21} = 3$$

EJERCICIOS

1. Calcular : (x + y) si los pares ordenados.
((a + b) x – (a-b) y; 2a² 2b²) y (4 ab; (a-b)x + (a + b)y) son iguales.
Rpta. 2a.

2. Si los pares ordenados

$$\left(\frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} ; \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3}\right)$$

y $\left(-\frac{5}{2};-\frac{7}{5}\right)$ son iguales, determine el valor numérico de : $x^{|y|} + y^{|x|}$ **Rpta. 17**

PRODUCTO CARTESIANO

Dado dos conjuntos A y B no vacíos, se define el producto cartesiano A x B como el conjunto de pares ordenados (a, b) tal que a $\in$A $\wedge$ b $\in$ B; es decir:

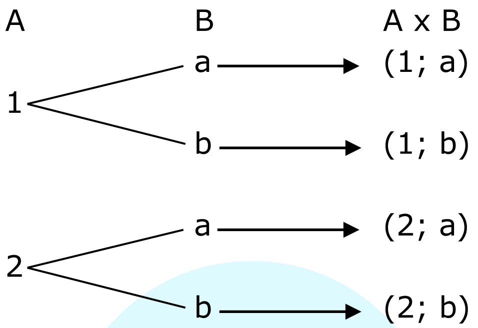
$$A \times B = \{(a;b) \;/\; a \in A \wedge b \in B\}$$

En el conjunto de pares ordenados (a,b), las primeras componentes se encuentran en el conjunto A y las segundas componentes en el conjunto B.

Ejemplo 2.- Dado los conjuntos

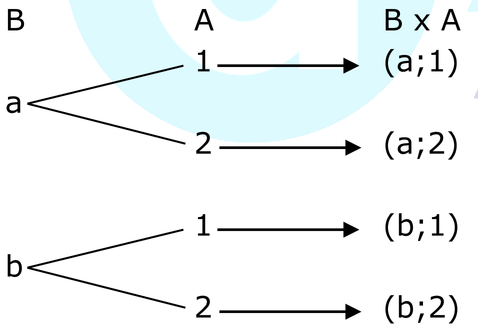
A = {1, 2} y B = {a, b}
Determine a) A x B
b) B x A

SOLUCIÓN
a. Mediante el "Diagrama de árbol"



A x B = {(1;a), (1;b), (2;a), (2;b)}

b. De otro lado



B x A = {(a;1), (a;2), (b;1), (b;2)}
En este ejemplo vemos que :

$A \times B \neq B \times A$

OBSERVACIÓN.- El producto cartesiano se puede extender a tres o más conjuntos no vacíos, es decir:

$$\boxed{A\times B\times C=\{(a,b,c)/\ a\in A \wedge b\in B \wedge c\in C\}}$$

Donde (a, b, c) es un terma ordenada definida en términos de conjuntos.

(a, b ,c) = { {a}, {a, b}, {a, b, c}}

PROPIEDADES GENERALES DEL PRODUCTO CARTESIANO

1. Si n(A) es el número de elementos del conjunto A y n(B) es el número de elementos del conjunto B, entonces n (A x B) = n(A).n(B) es el número de elementos del producto cartesiano A x B.
2. El producto cartesiano en general no es conmutativo , es decir
   $A \times B \neq B \times A$, a menos que A = B.
3. A x B = Φ; si A es vacío o B es vacío.
4. N (A x B x C) = n(A) . n(B). n(C)

Ejemplo 3.- Dado los conjuntos

$A = \{X \in Z/\ 6 < x - 2 < 12\}$
$B = \{X \in Z/\ -4 \leq x + 3 < 9\}$
¿Cuántos elementos tiene, A x B?

Solución :
Para el conjunto A, se cumple:

$6 < x - 2 < 12$

Sumando 2 a todos los miembros de la desigualdad, se obtiene.

$8 < x < 14$

A = {9,10,11,12,13} → $\boxed{n(A) = 5}$

Para el conjunto B, se cumple:

$-4 \leq X + 3 < 9$

Adicionando −3 a todos los miembros de la desigualdad, se obtiene:

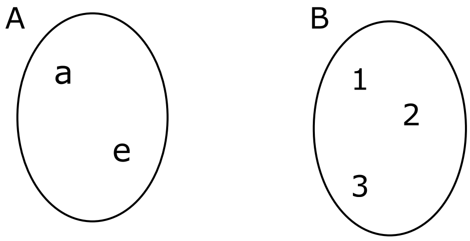
$-7 \leq x < 6$

B = { -7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;-1;-2; -3;-4;-5}

Con lo cual n(B) = 13

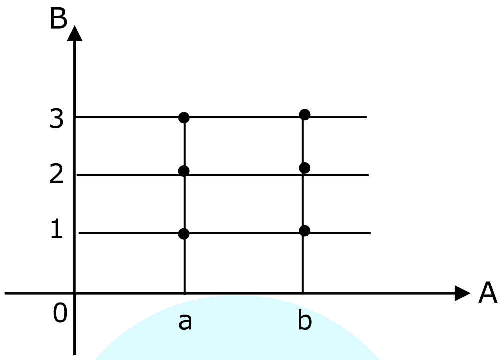
$\therefore$ $\boxed{n\ (A\ \times B) = n\ (A).n\ (B) = (5)\ (13) = 65}$

Ejemplo 4.- Dado los conjuntos

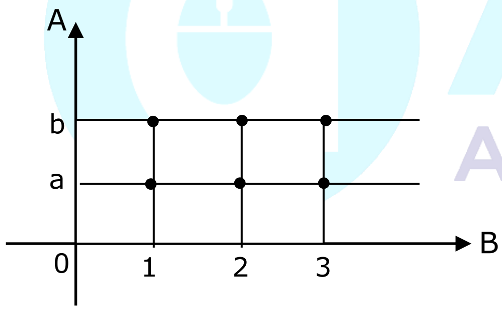


Determine gráficamente :
i) A x B   ii)   B x A

Solución
i)   Gráfica de : A x B



ii) Gráfica de B x A



de i) y ii) vemos que : A x B $\neq$ B x A

EJERCICIO

1. Dado los conjuntos

$A = \{X \in N \,/\, X^2 - 2 < 23\}$
$B = \{X \in Z^{+}_{0} \,/\, X^2 - 3 < 6\}$
$C = \{X \in Z \,/\, 3 < X - 6 \leq 12\}$

¿Cuántos elementos tiene : A x B x C?
Rpta. : 108

RELACIONES

Definición.- Dadas dos conjuntos A y B no vacíos, se llama una relación R de A en B a un subconjunto cualquiera de A x B.

R es una relación de A en B $\Leftrightarrow$ R $\subset$ A x B

Nota.- Una relación de A en B se llama también relación binaria.

Definición.- Un conjunto R es una relación en A si y solo sí R $\subset$ A x A

Ejemplo 5.- Dado el conjunto
A = {1, 3, 5} y una relación R en A definida por :
$(x , y) \; R \Longleftrightarrow y = x + 2$
Cuantos elementos tiene R.

Solución :
Notemos que el conjunto A x A es :

$A \times A = \{(1;1), (1;3), (1;5); (3;1)$
$(3;3),(3;5),(5,1);(5;3);(5,5)\}$

Luego una relación R en A de elementos (x, y) tal que y = x + 2 es:

R = {(1;3), (3;5)}; vemos que la relación R tiene 2 elementos.

Ejemplo 6.- Sea el conjunto
A = {2, 4 ,6 ,8}. Donde las relaciones R_1 y R_2 en A están dadas por :

$R_1 = \{(x , y\}/ x + y = 10\}$
$R_2 = \{(x , y) / y = x\}$
Hallar : $n(R_1)$ y $n(R_2)$

Solución :

Teniendo en cuenta que :

$R_1 = \{(x, y\}/ x + y = 10\}$ entonces

$R_1 = \{(2;8), (4;6),(8;2),(6;4)\}$

De otro lado

$R_2= \{(x, y)/y =x\}$ entonces

$R_2= \{(2;2); (4;4);(6;6);(8;8)\}$

$\therefore\ n(R_1) = 4$ y $n(R_2) = 4$

CLASES DE RELACIONES

A. **Relaciones reflexivas.-** Dado un conjunto R de pares ordenados R es una relación reflexiva" en A

$$\boxed{\text{Si : } \forall a \in A ;\ (a ; a) \in R}$$

B. **Relaciones Simétricas.-** Dado un conjunto R de pares ordenados R es una "relación simétrica" en A.

$$\boxed{\text{Si : } (a;b) \in R \rightarrow (b; a) \in R}$$

C. **Relaciones transitivas.-** Dado un conjunto R de pares ordenados la relación R en un conjunto A es una "relación transitiva" en A.

$$\boxed{\text{Si : } (a;b) \in R \wedge (b;c) \in R \Rightarrow (a;c) \in R}$$

D. **Relaciones de equivalencia.-** Una relación R en un conjunto no vacío A es una "relación de equivalencia" en A, si en forma simultanea satisface las siguientes condiciones:

i. R es reflexiva :

$$\forall a \in A ;\ (a ; a) \in R$$

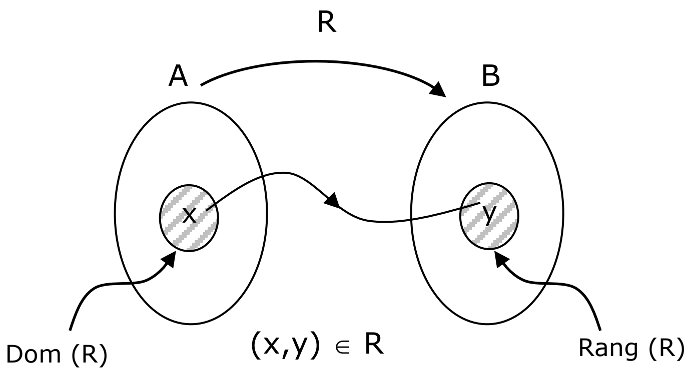
ii. R es simétrica :

$$(a ; b) \in R \rightarrow (b; a) \in R$$

iii. R es transitiva.

$$[(a;b) \in R \wedge (b;c) \in R] \rightarrow (a;c) \in R$$

DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN



R es una relación de A en B si

$R \in A \times B$; donde :

$A \times B = \{(x,y) / x \in A \wedge y \in B)$

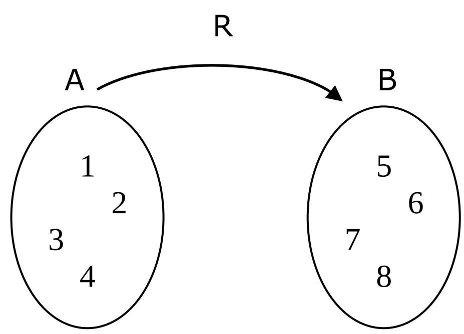
Dominio de la relación R .- Es el conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados de R, es decir:

$\boxed{\text{Dom (R)} = \{x/ (x, y) \in R\}}$ C. A.

Rango de la relación R.- Es el conjunto de todas las segundas componentes de los pares ordenados de R, es decir:

Rang (R) $= \{y /(x,y) \in R\} \subset B$

Ejemplo.- Dado los conjuntos



Donde R es una relación de A definida por:

$R = \{(1,5), (2,8), (3,5), (2,7)\}$

Determine : Dom (R) y Rang (R)

Solución:
Como el dominio está determinado por las primeras componentes.
Dom (R) = $\{1, 2, 3\}$
De otro lado como el rango está determinado por las segundas componentes :
Rang (R) = $\{5, 8, 7\}$

EJERCICIOS

1) Dado los conjuntos:
$A = \{1, 4, 9\} \wedge B = \{2, 8, 9\}$
R_1 y R_2 son relaciones de A en B tal que:
$R_1 = \{(a, b) \in A \times B \,/\, a \geq b\}$
$R_2 = \{(a, b) \in A \times B \,/\, a + b > 6\}$
Determine : $n(R_1) + n(R_2)$

Rpta. 9

2) Dado el conjunto
$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ y la relación R en A : $R = \{(x,y) \,/ 5$ es divisor de $x + y\}$, hallar la suma de todos los elementos del dominio de R.

Rpta. ______

3) Dada la relación R definida en los números reales:
$R = \{(x, y) \,/\, |x-y| \leq 6\}$
el valor veritativo de :
I. R es simétrica
II. R es reflexiva
III. R es transitiva
IV. R no es de equivalencia
es: Rpta. V V F V

FUNCIONES

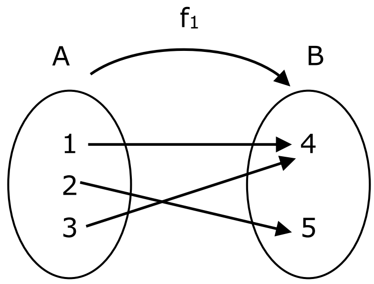
Dado dos conjuntos no vacíos "A" y "B" y una relación $f \subset A \times B$, se define:
"f es una función de A en B si y solamente si para cada $x \in A$ existe a lo más un elemento $y \in B$, tal que el par ordenado $(x, y) \in f$ ".

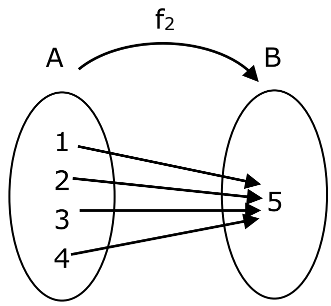
Observación.- Dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente; para la función f.

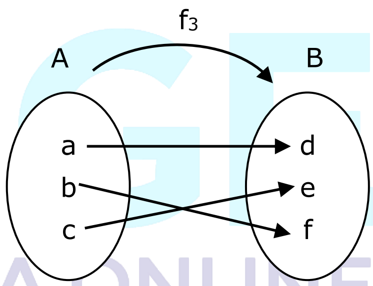
$$\boxed{(x;\, y) \in f \wedge (x;\, z) \in f \Leftrightarrow y = z}$$

Siendo A = Conjunto de partida
Y B = Conjunto de llegada

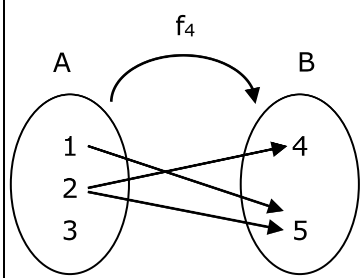
i) Son funciones:

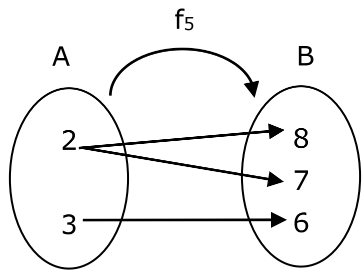






ii) No son funciones



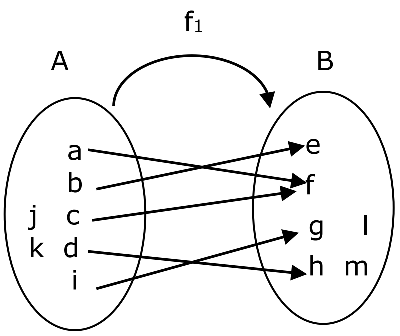


DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Dominio de f: Dom (f)
Se llama también pre-imagen y es el conjunto de los primeros elementos de la correspondencia que pertenecen al conjunto de partida A. (Dom (f) $\subset$ A)
Rango de f = Rang (f)

Llamado también imagen, recorrido o contradominio, es el conjunto de los segundos elementos de la correspondencia que pertenecen al conjunto de llegada B (Rang. (f) $\subset$ B)

Ejemplo.- Dada la relación representada por el diagrama sagital.



Hallar Dom (f) $\wedge$ Rang (f)

Solución:

Vemos que la función está dada por:

f= $\{(a; f), (b; e), (c; f), (d; h), (i; g)\}$

luego por definición:

Dom (f) = $\{a; b; c; d; i\}$

Rang (f) = $\{f; e; h; g\}$

APLICACIÓN

La función f se denomina aplicación de A en B si y solamente si todo elemento x $\in$ A sin excepción, tiene asignado un elemento y $\in$ B y solamente uno, en tal caso se denota de la siguiente forma:

$$f : A \longrightarrow B \quad \vee \quad A \xrightarrow{f} B$$

Para este caso

Dom (f) = A $\wedge$ Rang (f) $\subset$ B

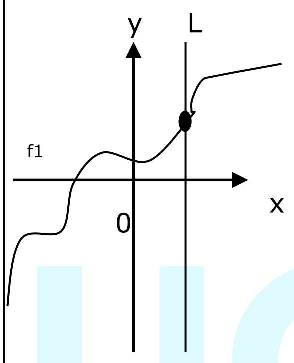
FUNCIÓN REAL DE VARIANTE REAL

Si los conjuntos A y B, de partida y llegada respectivamente de una función f son conjuntos de números reales, entonces f es una función real de variable real y por ello f tendrá una representación gráfica en el plano R^2. Existe una relación unívoca entre la variable independiente x y su imagen la variable dependiente y; es decir:

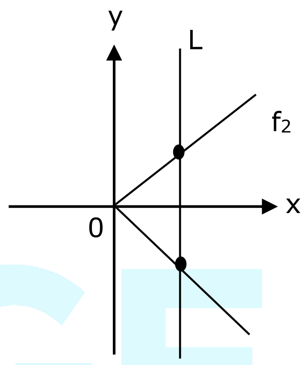
$$f = \{(x; y) \in R \times R / x \in Dom(f) \wedge y = f(x)\}$$

Propiedades Geométrica.- Una relación f $\subset$ R x R es una función real, si y solo sí, toda recta vertical o paralela al eje "y" corta a la gráfica f a lo más en un punto.

Respecto a las gráficas:



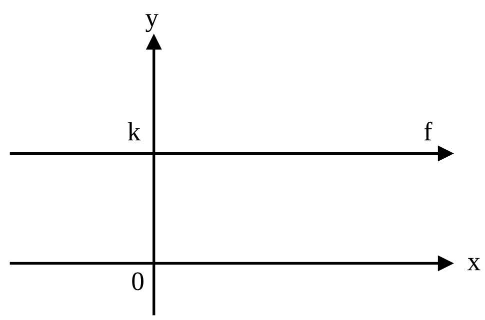
f_1 es función
L corta en un punto



f_2 no es función
L corta en dos puntos

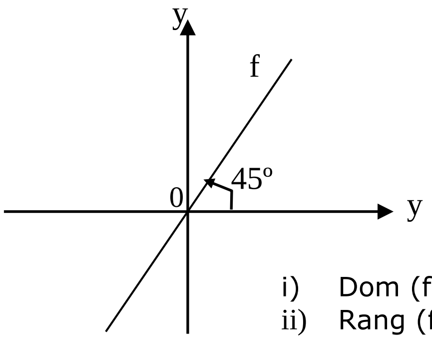
FUNCIONES ESPECIALES

Función constante.- Se simboliza por C y su regla de correspondencia está dada por C (x) = f(x) = k



i) Don (f) R ii) Rang (f) = K

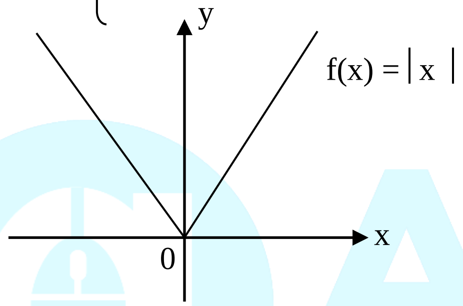
Función Identidad.- Se simboliza por I, y su regla de correspondencia es: I (x) = f (x) = x



i) Dom (f) = R
ii) Rang (f) = R

Función Valor Absoluto.- Su regla de correspondencia está dada por:

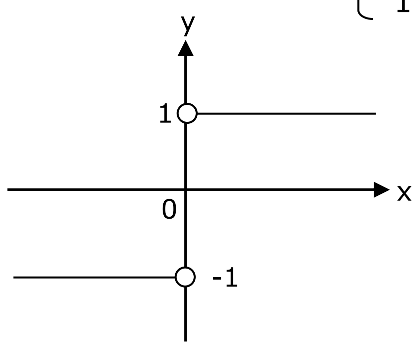
$$y = f(x) = |x| \begin{cases} x \; ; \; x > 0 \\ 0 \; ; \; x = 0 \\ -x \; ; \; x < 0 \end{cases}$$



i) Dom (f) = R ii) Rang (f) = [0; ∞ >

Función Signo.- Se simboliza por "sgn" su regla de correspondencia está dada por:

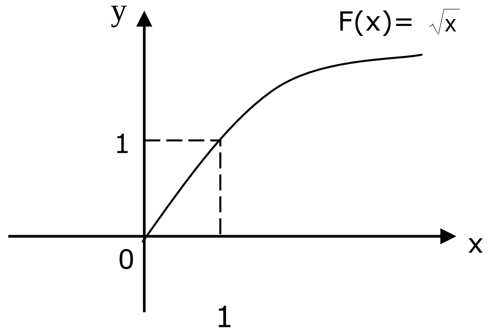
$$y = f(x) = \text{sgn}(x) \begin{cases} -1 \; ; \; x < 0 \\ 0 \; ; \; x = 0 \\ 1 \; ; \; x > 0 \end{cases}$$



i) Dom (f) = R ii) Rang (f) = {-1, 0, 1}

Función raíz cuadrada.- Se simboliza por el signo radical $\sqrt{\;}$ y su regla de correspondencia es:

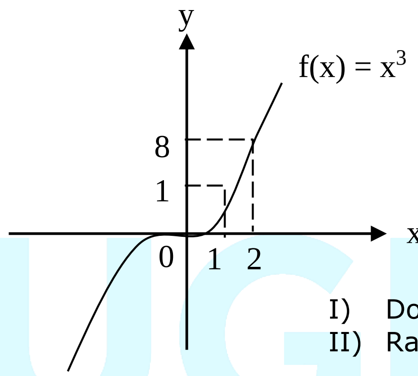
$y = f(x) = \sqrt{x}$



i) Dom(f) =[0; ∞ > ii) Rang (f) = [0; ∞ >

Función cúbica.- Está determinada por la regla de correspondencia.

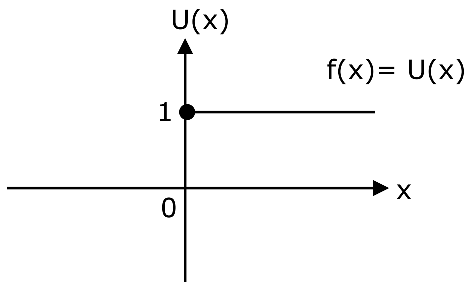
$y = f(x) = x^3$



I) Dom (f) = R
II) Rang (f) = R

Función Escalón Unitario.- Está denotado por U y su regla de correspondencia es:

$$y = f(x) = U(x) = \begin{cases} 0 \; ; \; x < 0 \\ 1 \; ; \; x \geq 1 \end{cases}$$



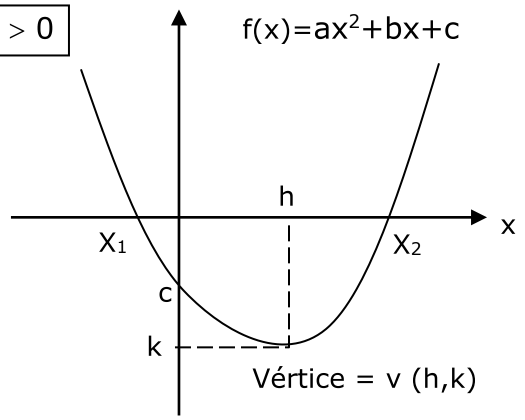
i) Dom (f) = [0; ∞ > ii) Rang (f) = {1}

Función Cuadrática.- La regla de correspondencia de esta función está dada por:

$y = f(x) = ax^2 + bx + c \; ; \; a \neq 0$

Se presentan dos casos

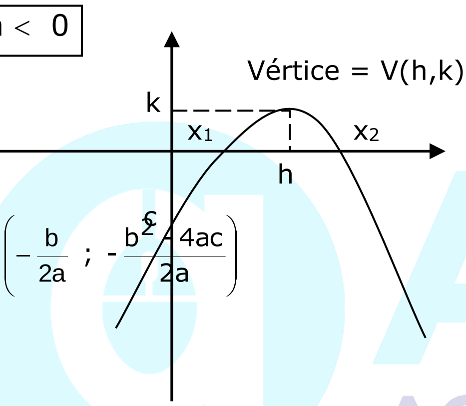
1. $\boxed{a > 0}$



$$V(h;\,k) = V\left(-\frac{b}{2a}\;;\;-\frac{b^2-4ac}{2a}\right)$$

i) Dom (f) = R ii) Rang (f) = [-k; ∞ >

2. $\boxed{a < 0}$



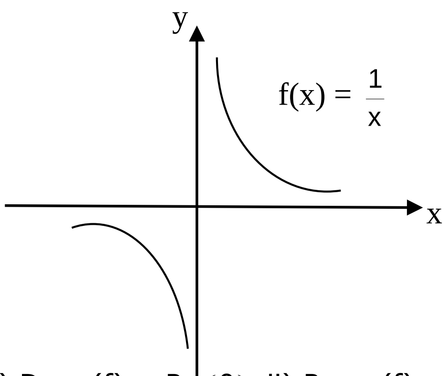
$$V(h;\,k) = V\left(-\frac{b}{2a}\;;\;-\frac{b^2-4ac}{2a}\right)$$

i) Dom (f) = R ii) Rang (f) = <- ∞, k]

Función Inverso multiplicativo

Es aquella función cuya regla de correspondencia es:

$y = f(x) = \frac{1}{x}$; donde $x \neq 0$



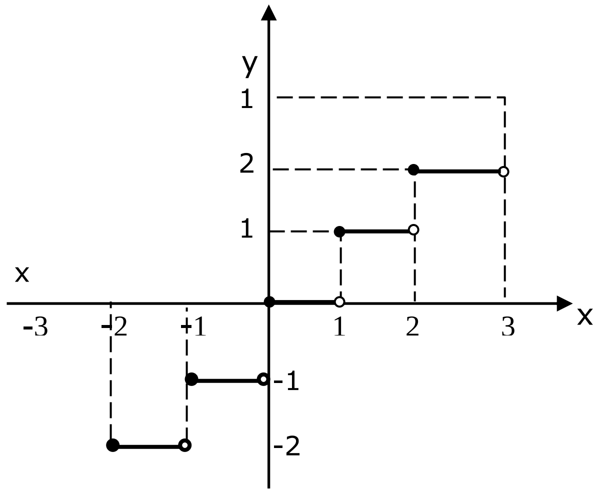
i) Dom (f) = R- {0} ii) Rang (f) = R -{0}

Función máximo entero.- Es aquella función definida por:

f(x) = [x] ; Si $n \leq x < n + 1$; $n \in z$

Dando valores a n

$$f(x) = [x] \begin{cases} -2 \;;\; \text{Si } -2 \leq x < -1 \\ -1 \;;\; \text{Si } -1 \leq x < 0 \\ 0 \;;\; \text{Si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \;;\; \text{Si } 1 \leq x < 2 \\ 2 \;;\; \text{Si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



i) Don (f) = R ii) Rang (f) = Z

EJERCICIOS

1. Hallar el dominio y rango de la función:

$f(x) = \dfrac{x + |x|}{x}$; $x \neq 0$

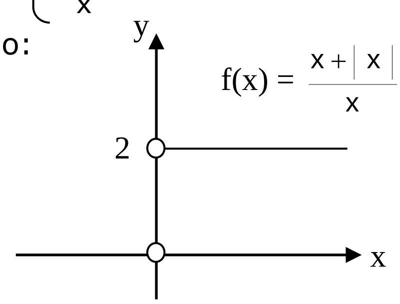
Solución

Dado que $|x| = \begin{cases} x \;;\; x \geq 0 \\ -x \;;\; x < 0 \end{cases}$

la regla de la correspondencia de la función f(x), donde $x \neq 0$; es :

$$\mathbf{f(x)} \begin{cases} \dfrac{x+x}{x} = 2 \;;\; \mathbf{x > 0} \\[2ex] \dfrac{x-x}{x} = 0 \;;\; \mathbf{x < 0} \end{cases}$$

Graficando:



i) Dom (f) = R- {0} ii) Rang (f) = {0, 2}

SUCESIONES
PROGRESIONES ARITMETICAS
PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

SUCESIONES

Una sucesión es un conjunto de números que presenta un cierto orden de acuerdo a una ley de formación.
En términos de conjunto las sucesiones se expresan como :

$$S = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots..,\ a_n,\ \ldots.\}$$

Toda sucesión debe ser determinado a través de su término e-nésimo (a_n), es decir:

Para $n = 1 \rightarrow a_1$
Para $n = 2 \rightarrow a_2$
Para $n = 3 \rightarrow a_3$
. . .
. . .
. . .

En general un término cualquiera de la sucesión tal como a_k, se obtiene a través de a_n cuando $n = k$. Son ejemplos de sucesiones :

a. $P = \{ 3,5,7,9,\ldots..,(2n+1),\ldots\}$
b. $Q = \{1,4,9,16,\ldots..,n^2,\ldots\ldots...\}$
c. $R = \{1,1,2,6,24,\ldots.,(n-1)!,\ldots..\}$

CLASIFICACION DE LAS SUCESIONES

Atendiendo al número de términos las sucesiones pueden ser :

a. Sucesiones finitas.- Son aquellas que tienen un número limitado de términos.
Ejemplo:
$A = \{6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$

b. Sucesiones infinitas.- Estas sucesiones se caracterizan porque sus términos son ilimitados.
Ejemplo:
$P = \{-1, 2, 7, 14, \ldots.., (n^2-2),\ldots.\}$

SERIES.- Se llama serie a la suma indicada de los elementos de una sucesión, es decir dada la sucesión.

$S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots...., a_n, \ldots\ldots\}$
La serie está representada por

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots..}$$

Dependiendo de que la sucesión sea finita e infinita, las series serán finitas e infinitas.

TIPOS DE SERIES

Entre los de interés tenemos :

a. Las Progresiones.
- Progresión aritmética.
- Progresión geométrica.
- Progresión Armónica.

b. Series de potencia de los números enteros positivos.
c. Series numéricas relacionadas con los números enteros positivos.
d. Series que involucran combinatorias.
e. Series recurrentes.

PROGRESIONES

Son Sucesiones numéricas cuya ley de formación se establece a través de una suma o multiplicación constante.

PROGRESION ARITMETICA

Definición.- Las progresiones aritméticas o diferenciales son sucesiones de números donde un término cualquiera después del primero es igual al anterior más una cantidad constante (distinta de cero) llamada razón o diferencia de la progresión.

Símbolos de una progresión aritmética.

P.A. : Significa progresión aritmética.
$\div$: Inicio de una P.A.
a_1 : Primer término de la P.A.
a_n : último término de la P.A.
n : número de términos de la P.A.
r : Razón o diferencia constante.
S_n : Suma de los n primeros términos de una P.A.
m : Medios de una P.A.

Representación general de una P.A.

Las sucesiones aritméticas finitas de razón "r" y "n" términos se representan bajo la forma.

Extremos de la P.A.

$$\div a_1 . \underbrace{a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1}}_{m\,=\,n-2\text{ (medios)}} ; a_n$$

Medios : { Aritméticos ó Diferenciales

$r \neq 0$

Primer Término — Último Término

$$\boxed{\text{Razón : } r = a_2 - a_1 \ldots\ldots = a_n - a_{n-1}}$$

Ejemplos de P.A.

a). $\div$ 6.9.12.15.18 → { a_1 : 6, a_n : 18, r : 9-6=3, n : 5, m : 3 }

b). $\div$ 9.7.5.3.1.-1 → { a_1 : 9, a_n : -1, r : 7-9=2, n : 6, m : 6-2=4 }

De los ejemplos vistos las progresiones aritméticas pueden ser :

a). P.A. creciente (razón > 0)
b). P.A. Decreciente (razón < 0)

PROPIEDADES GENERALES DE LAS PROGRESIONES ARITMETICAS

Propiedad 1.- En toda P.A. de "n" términos y razón "r" el último término es igual al primero más (n-1) veces la razón, es decir :

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\,r}$$

DEMOSTRACION

Sea la progresión aritmética

$\div a_1 \, . \, a_2 \, . \, a_3 \ldots\ldots\ldots a_{n-2} \, . \, a_{n-1} \, . \, a_n$

Por definición sabemos que :

$$\boxed{a_k = a_{k-1} + r} \qquad K = 2, 3,4,\ldots.n$$

Expandiendo :

$$\left.\begin{array}{l}
\cancel{a_1} = a_1 \\
\cancel{a_2} = \cancel{a_1} + r \\
\cancel{a_3} = \cancel{a_2} + r \\
\cancel{a_4} = \cancel{a_3} + r \\
\;\cdot \\
\;\cdot \\
\cancel{a_{n-2}} = \cancel{a_{n-3}} + r \\
\cancel{a_{n-1}} = \cancel{a_{n-2}} + r \\
a_n = \cancel{a_{n-1}} + r
\end{array}\right\} \text{(n-1) veces}$$

$$a_n = a_1 + \underbrace{r + r + \ldots\ldots + r}_{(n-1)\text{ veces}}$$

$\therefore$ $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$

Propiedad 2.- En toda P.A. de razón "r" y "n" términos:

$\div\ a_1 \,.\, a_2 \ldots\ldots a_p \ldots\ldots a_q \ldots\ldots a_{n-1} . a_n$

el término de lugar "q" en función del término de lugar "p" está formulada por:

$$\boxed{a_q = a_p + (q-p)\,r}$$

Propiedad 3.- En toda P.A. de "n" términos y razón "r", un término cualquiera que ocupe el lugar K-ésimo contado a partir del extremo final es igual al último término menos (k-1) veces la razón, es decir:

$$\boxed{a_k = a_n - (k-1)\,r}$$

Propiedad 4.- En toda P.A. de "n" términos y razón "r", la suma de los términos equidistantes de los extremos es una cantidad constante e igual a la suma de los extremos, es decir :

$$\div\ \underbrace{a_1, a_2 \ldots\ldots a_p}_{\text{"p" términos}} \ldots\ldots\ldots\ldots \underbrace{a_q \ldots\ldots a_{n-1} . a_n}_{\text{"p" términos}}$$

Se cumple que

$$\boxed{a_p + a_q = a_1 + a_n}$$

DEMOSTRACION

Dado que "a_p" y "a_q" equidistan de los extremos.

$a_p = a_1 + (p-1)\,r$ .... (α)

$a_q = a_n - (p-1)\,r$ .... (β)

Sumando miembro a miembro (α) y (β) obtenemos :

$\boxed{a_p + a_q = a_1 + a_n}$ l.q.q.d.

Ejemplo : En la P.A.

$\div$ 7 . 12 . 17 . 22 . 27 . 32 . 37 . 42.

Se observa que :

$\div$ 7 . 12 . 17. 22. 27. 32. 37. 42

$a_1 + a_n$ = 12+37= 17+32 = 22+27=49

Propiedad 5.- En toda P.A. de un número impar de términos, el término central "a_c" es igual a la semisuma de los términos equidistantes de los extremos e igual a la semisuma de los extremos.

En la P.A. de "n" términos y razón "r", cuyo esquema es

$$\div\ \underbrace{a_1 \_\_\_\_ a_p}_{\text{"p" términos}} \underbrace{\_\_\_\_ a_x}_{\text{"k" términos}} . a_c . \underbrace{a_y \_\_\_\_}_{\text{"k" términos}} \underbrace{a_q \_\_\_\_ a_n}_{\text{"p" términos}}$$

a_c = término central

Se cumple que :

$$\boxed{a_c = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{a_p + a_q}{2}}$$

Ejemplo : En la P.A.

$\div$ 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32

$a_c = 20$

Se cumple que :

$$a_c = \frac{8+32}{2} = \frac{12+28}{2} = \frac{16+24}{2} = 20$$

Propiedad 6.- En toda P.A. de tres términos, el término central es la media aritmética de los extremos.

En la P.A.

$\div$ x. y. z

Se cumple que : $\boxed{y = \dfrac{x+z}{2}}$

Propiedad 7.- La suma de los "n" primeros términos de una P.A. de razón "r".

$\div\, a_1\,.\; a_2\; \ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{n-1}\,.\; a_n$

es igual a la semisuma de los extremos multiplicado por el número de términos, es decir:

$$\boxed{S_n = \left[\frac{a_1 + a_n}{2}\right]n}$$

DEMOSTRACIÓN

En la progresión aritmética.

$\div\, a_1.\; a_2\; \ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{n-1}\,.\; a_n$

La suma de los "n" primeros términos es :

$S_n = a_1+a_2 \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}+a_n \;\ldots\ldots\ldots\; (\alpha)$

ó

$S_n = a_n+a_{n-1} \ldots\ldots\ldots + a_2 + a_1 \;\ldots\ldots\ldots\; (\beta)$

Sumando miembro a miembro

$$2S_n = \underbrace{(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots\ldots+(a_n+a_1)}_{\text{"n" términos}}$$

Como la suma de los términos equidistantes es una cantidad constante e igual a la suma de los extremos.

$$2S_n = \underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\ldots\ldots+(a_1+a_n)}_{\text{"n" términos}}$$

$$\boxed{S_n = \left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\; n} \qquad \text{L.q.q.d.}$$

De otro lado, como :

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$$\boxed{S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right]n}$$

Propiedad 8.- En toda P.A. de un número impar de términos y término central "a_c", la suma de sus "n" términos está dado por :

$$\boxed{S_n = a_c\,.\; n} \quad ;\; n\; (\#\text{impar})$$

INTERPOLACION

Interpolar "m" medios diferenciales entre los extremos "a_1" y "a_n" de una progresión aritmética, es formar la progresión. En efecto para la P.A.

$$\div\, a_1\, \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"m" medios}}\, a_n$$

Los datos conocidos son :

$$\begin{cases} \text{Primer término : } a_1 \\ \text{Último término : } a_n \\ \text{Número de términos : } n = m + 2 \end{cases}$$

El elemento a calcular es la razón : r

De la fórmula : $a_n = a_1 + (n-1)\, r$

Como : $n = m + 2 \rightarrow a_n = a_1 + (m+1)r$

Obtenemos: $\boxed{r = \dfrac{a_n - a_1}{m+1}}$

Conocida la razón ya es posible interpolar o formar la P.A.

OBSERVACION

En la resolución de problemas sobre P.A. es necesario expresar los términos de la progresión bajo las siguientes formas :

i. Si el número de términos es impar, la razón a considerar es "r".

Ejm: Para 3 términos; se tendría :

$\div (a - r) \,.\, a. \,(a + r)$

ii. Si el número de términos es par, la razón a considerar es "2r".

Ejm: Para 4 términos; se tendría:

$\div (a - 2r) \,.\, (a - r). \,(a + r) \,.\, (a + 2r)$

EJERCICIOS

01. En la P.A.

$\div -16 \,.\, -13 \,.\, -10 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Hallar el término de lugar 19.

Solución :

En toda P.A. un término cualquiera se determina por la fórmula :

$$\boxed{\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)\,r}}$$

$$\text{donde:}\left\{\begin{array}{l} a_1 = -16 \\ n = 19 \\ r = 3 \end{array}\right.$$

Reemplazando valores

$a_{19} = -16 + (19 - 1)\,(3)$

$\boxed{a_{19} = 38}$ Rpta.

02. En la progresión aritmética.

$$\div\ \underbrace{\mathbf{a \ldots\ldots\ldots\ldots 46}}_{\text{"m" medios}}\ \underbrace{\mathbf{\ldots\ldots\ldots\ldots b}}_{\text{"m" medios}}$$

Determine el valor de m si la suma de sus términos es 782.

Solución :

En la P.A. se observa que el término central: $a_c = 46$

Número de términos : $n = 2m+3$

Suma de términos : $S_n = 782$

Dado que :

$\boxed{S_n = a_c \,.\, n} \rightarrow 782 = 46\,(2m+3)$

$2m + 3 = 17$

De donde : $\boxed{m = 7}$

03. En la progresión aritmética.

$\div 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 16 \ldots\ldots\ldots\ldots 46$

El número de términos comprendidos entre 16 y 46 es el triple de los comprendidos entre 4 y 16. Hallar la suma de todos los términos de la P.A.

Solución :

De acuerdo con el enunciado tenemos :

$$\div\ 4\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"x" term.}}\ 16\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{"3x" term.}}\ 46$$

$$\text{Entre 4 y 16}\left\{\begin{array}{l} a_1 = 4 \\ a_n = 16 \\ n = x + 2 \end{array}\right.$$

De la fórmula : $\boxed{a_n = a_1 + (n\text{-}1)r}$

$16 = 4 + (x + 1)r$

$$\frac{12}{x+1} = r \;\ldots\ldots\ldots\; (\alpha)$$

$$\text{Entre 16 y 46}\left\{\begin{array}{l} a_1 = 16 \\ a_n = 46 \\ n = 3x+2 \end{array}\right.$$

De la fórmula : $\boxed{\mathbf{a_n = a_1 + (n\text{-}1)r}}$

$46 = 16 + (3x+1)r$

$$\frac{30}{3x+1} = r \;\ldots\ldots\ldots\; (\beta)$$

Igualando (α) y (β)

$$\frac{12}{x+1} = \frac{30}{3x+1} \rightarrow 36x + 12 = 30x + 30$$

$6x = 18$

$x = 3$

Reemplazando el valor de x = 3 en (α)

$r = \dfrac{12}{3+1} \rightarrow \boxed{r = 3}$

Luego en la P.A.

$\div\, 4\underbrace{.............}_{3\text{ term.}}16\underbrace{.................}_{9\text{ term.}}46$

Tenemos los datos :

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 46 \rightarrow \quad S_n = \left[\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right]n \\ n = 15 \end{cases}$$

De donde : $S_{15} = \left(\dfrac{4+46}{2}\right)15$

$\boxed{S_{15} = 375}$

04. Cuantos términos de la P.A.
$\div$ 32 . 26 . 20 ....
Se deben tomar para que su suma sea 72. Rpta. 9.

05. Si, S_n = 3n (2n – 1) es la suma de los "n" términos de una P.A.
Hallar el término de lugar "p" que ocupa dicha progresión aritmética.
Rpta: 3 (4 p - 3)

PROGRESION GEOMETRICA

Definición.- La progresión geométrica o por cociente es una sucesión de números, donde cada término después del primero es igual al anterior, multiplicado por una cantidad constante (diferente de cero y de la unidad), llamada razón de la progresión geométrica.

Símbolos de una progresión geométrica.

P.G. : Progresión geométrica

$\dfrac{\circ\circ}{\circ\circ}$: Inicio de la P.G.

t_1 : Primer término

t_n : último término

q : razón de la P.G.

n : Número de términos

s : Suma de los términos de la P.G.

p : Producto de los términos de la P.G.

S_∞ : Suma límite de los infinitos términos de una P.G. decreciente infinita.

REPRESENTACION GENERAL DE UNA P.G.

Toda progresión geométrica de "n" términos y razón "q" se representa de la siguiente forma :

Extremos

$\dfrac{\circ\circ}{\circ\circ}\ t_1 : \underbrace{t_2 : .... : t_{n-1}}: t_n$

* Medios $\begin{cases}\text{Geométricos} \\ \text{Proporcionales}\end{cases}$

* $q \neq 0 \quad \wedge \quad q \neq 1$ (razón)

Primer Termino — último término

La razón de la P.G. está determinada por la división de dos términos consecutivos de la progresión :

$$q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = ...\ ....\ .. = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

Debemos tener en cuenta lo siguiente :

i. Si : q > 1, la P.G. es creciente :

Ejemplo:

$\dfrac{\circ\circ}{\circ\circ}$ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 $\begin{cases} q = \dfrac{4}{2} = 2 > 1 \\ \text{La P.G. es} \\ \text{creciente}\end{cases}$

ii. Si; 0 <q <1, la P.G. es decreciente.

Ejemplo:

$$\div\div\ 243 : 81 : 27 : 9 \quad \begin{cases} q = \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3} \\ 0 < \dfrac{1}{3} < 1 \\ \text{La P.G. es decreciente} \end{cases}$$

iii. Si : $q < 0$ la P.G. es oscilante.

Ejemplo:

$$\div\div\ 64 : -32 : 16 : -8 \quad \begin{cases} q = \dfrac{-32}{64} = -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} < 0 \\ \text{La P.G. es oscilante} \end{cases}$$

PROPIEDADES

Propiedad 1.-
En toda P.G. un término cualquiera es igual al primer término multiplicado por la razón, donde la razón se encuentra elevado al número de términos menos uno.

$$\boxed{t_n = t_1 \; q^{n-1}}$$

DEMOSTRACION

Sea la P.G.

$\div\div\ t_1 : t_1 q : t_1 q^2 : \ldots\ldots\ldots\ldots : t_n$

en el cual observamos.

$t_1 = t_1 = t_1 q^{1-1}$

$t_2 = t_1 q^1 = t_1 q^{2-1}$

$t_3 = t_1 q^2 = t_1 q^{3-1}$

$t_4 = t_1 q^3 = t_1 q^{4-1}$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

. . . . .

$t_n = t_1 q^{n-1}$

$\therefore \quad \boxed{t_n = t_1 q^{n-1}}$ L.q.q.d.

Propiedad 2.- En toda P.G. el producto de dos términos equidistantes es una cantidad constante e igual al producto de los extremos, es decir en la P.G.

$$\div\div\ \underbrace{t_1 : \ldots\ldots\ldots : a : x}_{(k+1)\text{ términos}} : \ldots\ldots\ldots : \underbrace{y : b : \ldots\ldots\ldots : t_n}_{(k+1)\text{ términos.}}$$

$$\boxed{xy = t_1 \cdot t_n}$$

Ejemplo : En la P.G.

$\div\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486$

Veces que :

$6\,(162) = 18(54) = 2(486) = 972$

Propiedad 3.- En toda P.G. de un número impar de términos, el término central es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

Sea la P.G.

$$\div\div\ \underbrace{t_1 : \ldots\ldots\ldots : a : x}_{(k+1)\text{ términos}}\underbrace{: b \ldots\ldots\ldots : t_n}_{(k+1)\text{ términos}}$$

Se cumple :

$$\boxed{x = \sqrt{t_1 . t_n}}$$

Ejemplo:

En la P.G.

$\div\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$

Término central

Vemos que :

$24 = \sqrt{3(192)} = \sqrt{576}$

Propiedad 4.- En toda P.G. finita el producto de sus términos es igual a la raíz cuadrada del producto de sus términos extremos, elevado al número de términos de la progresión geométrica, es decir:

$$\boxed{P = \sqrt{(t_1.t_n)^n}}$$

DEMOSTRACIÓN
Sea la progresión geométrica.

$\because$ $t_1 : t_2 : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_{n-1} : t_n$

El producto de sus términos es:

$P = t_1 . t_2 . \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_{n-1} . t_n$

ó : $P = t_n . t_{n-1} . \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_2 . t_1$

multiplicando miembro a miembro.

$$P^2 = \overbrace{(t_1 . t_n)(t^2 . t_{n-1}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (t_n . t_1)}^{\text{"n" paréntesis}}$$

Dado que el producto de dos términos equidistantes es igual al producto de los extremos.

$P^2 = (t_1 . t_n)$

$\therefore$ $\boxed{P = \sqrt{t_1.t_n}}$ L.q.q.d.

Propiedad 5.- La suma de los términos de una P.G. finita es igual al último término por la razón menos el primer término; todo esto dividido entre la diferencia de la razón y la unidad.

$$\boxed{S = \frac{t_n . q - t_1}{q - 1}}$$

Dado que: $t_n = t_1 q^{n-1}$

$$\boxed{S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Propiedad 6.- El valor límite de la suma de los infinitos términos de una P.G. infinita decreciente es igual al primer término dividido entre la diferencia de la unidad y la razón, donde necesariamente el valor absoluto de la razón debe ser menor que la unidad.

$$\boxed{S\infty = \frac{t_1}{1-q}} \quad ; \ |q| < 1$$

INTERPOLACIÓN

Interpolar medios geométricos entre dos números dados es formar una progresión geométrica donde los extremos son los números dados.
Sea la progresión geométrica:

$$\because \ t_1 : \underbrace{t_2 : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_{n-1}}_{\text{"m" medios geométricos}} : t_n$$

la razón que determina la interpolación está dada por:

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

Ejemplo # 1.- Calcular el valor limite de la suma:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots\ldots\ldots\ldots\infty$$

Solución:
Obsérvese que:

a) $\frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

c) $\frac{4}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$

Con lo cual "S" se puede agrupar de la siguiente forma:

$$S = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots\ldots\infty\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots\right) + \ldots\ldots$$

Cada paréntesis representa la suma de infinitos términos de una progresión geométrica infinita de razón q = $\frac{1}{2}$, por consiguiente:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} + \ldots\ldots\infty$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\infty$$

esta última serie, también es una progresión geométrica infinita decreciente de razón q = $\frac{1}{2}$; entonces:

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{S = 2}$$ Rpta.

LOGARITMOS
ECUACIONES LOGARITMICAS

DEFINICIÓN

El logaritmo de un número "N" real y positivo ($N > 0$), en una base "b" mayor que cero y diferente de la unidad ($b > 0 \wedge b \neq 1$) es el exponente real "a" tal que elevado a la base "b" se obtiene una potencia (b^a) igual al número (N).

En efecto observemos los siguientes ejemplos:

1. $2^5 = 32 \Rightarrow$ $\boxed{5}$ es el logaritmo de $\boxed{32}$ en base $\boxed{2}$

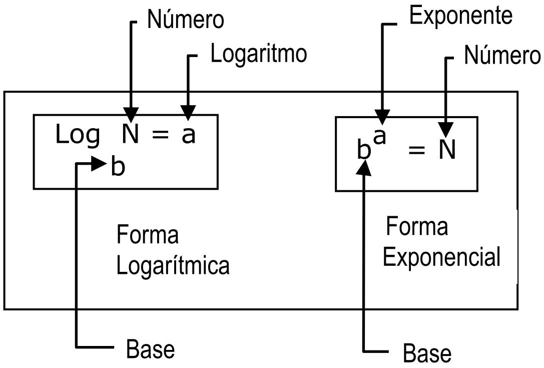
2. $3^{-2} = \frac{1}{9} \Rightarrow$ $\boxed{-2}$ es el logaritmo de $\boxed{\frac{1}{9}}$ en base $\boxed{3}$

3. $\sqrt{2}^{\,6} = 8 \Rightarrow$ $\boxed{6}$ es el logaritmo de $\boxed{8}$ en base $\boxed{\sqrt{2}}$

en general tendríamos que:

Si : $b^a = N \Rightarrow$ "a" es el logaritmo de "N" en base "b"

Expresando matemáticamente:



Vemos que: Logaritmo y exponente significa lo mismo siendo la única diferencia las notaciones matemáticas en la cual están representados, así tenemos las formas logarítmicas y exponencial respectivamente, donde una de ellas está ligada a la otra.

Es decir:

1. Si: $\text{Log}_b N = a \rightarrow b^a = N$

2. Si: $b^a = N \rightarrow \text{Log}_b N = a$

Debemos familiarizarnos con estas fórmulas a través de los siguientes ejemplos:

i) Paso de la forma exponencial logarítmica

1. Si: $2^4 = 16 \Rightarrow \text{Log}_2 16 = 4$
2. Si : $5^{-3} = \frac{1}{125} \Rightarrow \text{Log}_5 \frac{1}{125} = -3$
3. Si: $\sqrt{3}^{\,4} = 9 \Rightarrow \text{Log}_{\sqrt{3}} 9 = 4$

ii) Paso de la forma logarítmica a la forma exponencial

1. Si: $\text{Log}_5 625 = 4 \Rightarrow 5^4 = 625$

2. Si: $\text{Log}_7 \frac{1}{343} = -3 \Rightarrow 7^{-3} = \frac{1}{343}$

3. Si $\text{Log}_{\sqrt{6}} 216 = 6 \Rightarrow \sqrt{6}^{\,6} = 216$

Ejercicios:

a. Transforme de la forma exponencial a la forma logarítmica o viceversa según convenga:

1) $2^7 = 128$ 2) $\text{Log}_2 8 = 3$

3) $4^{-4} = \frac{1}{256}$ 4) $\text{Log}_{3\sqrt{3}} 9 = 6$

5) $5^3 = 125$ 6) $\text{Log}_7 49 = 2$

7) $3^5 = 243$ 8) $\text{Log}_{\sqrt{2}} 1 = 0$

9) $16^{1/4} = 2$ 10) $\text{Log}_{2\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = 1$

b. Aplicando la definición de logaritmo determine "x" en las siguientes ecuaciones:

11. $\text{Log}_{81} 729 = x$
12. $\text{Log}_{17} x = 1$
13. $\text{Log}_x 8 = \frac{3}{7}$
14. $\text{Log}_{64} 32 = x$
15. $\text{Log}_x 125 = \frac{3}{2}$
16. $\text{Log}_7 2401 = x$
17. $\text{Log}_{3\sqrt{3}} 1 = x$
18. $\text{Log}_{6\sqrt{6}} x = 1$
19. $\text{Log}_9 27 = x$
20. $\text{Log}_{9\sqrt{3}} 3\sqrt{3} = x$
21. $\text{Log}_{2\sqrt{2}} x = 4$
22. $\text{Log}_x 3 = 2$
23. $\text{Log}_2 (x-1) = 3$
24. $\text{Log}_{x-2} 5 = 1$
25. $\text{Log}_{2^3} 2^9 = x$
26. $\text{Log}_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} = x$
27. $\text{Log}_{2\sqrt{3}} (x-2) = 0$
28. $\text{Log}_{2\sqrt{3}} (x-2) = 1$

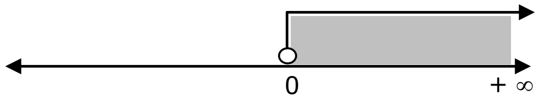
EXISTENCIA DE LOS LOGARITMOS EN R

Por definición sabemos que:

$$\boxed{\text{Log}_b N = a \leftrightarrow b^a = N}$$

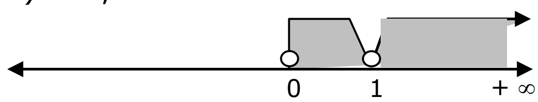
Donde:

i) N, es el "número": $N > 0$



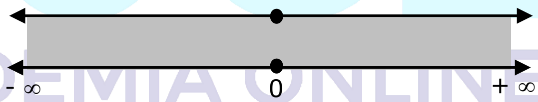
$N \in \langle 0; \infty \rangle$

ii) b, es la "base": $b > 0 \wedge b \neq 1$



$b \in \langle 0; 1 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$

iii) a, es el "exponente" ó logaritmo: $a \in R$



$a \in R$ ó $a \in \langle -\infty; \infty \rangle$

EJERCICIOS

Nota.- Para hallar el logaritmo de un número debemos tener en cuenta la siguiente relación:

$$\boxed{\text{Log}_b N = a \Rightarrow (\text{Base})^{\text{Logaritmo}} = \text{Número}}$$

Prob. # 1.- Calcular el logaritmo de $5\sqrt{5}$ en base $25\sqrt[3]{5}$

Solución:

Igualando a "x" el logaritmo pedido, se tendría:

$$\text{Log}_{25\sqrt[3]{5}}\sqrt{5}=x \rightarrow (25\sqrt[3]{5})^x=5\sqrt{5}$$

El problema ahora se reduce a resolver la ecuación exponencial para lo cual se expresa todo en base "5", es decir:

$$\left[5^2\bullet 5^{\frac{1}{3}}\right]^x=5.5^{\frac{1}{2}}$$

como : $\boxed{a^m\,.\,a^n=a^{m+n}}$, entonces

Tendríamos:

$$\left[5^{2+\frac{1}{3}}\right]^x=5^{1+\frac{1}{2}}$$

$$\left[5^{\frac{7}{3}}\right]^x=5^{\frac{3}{2}}\rightarrow 5^{\frac{7x}{3}}=5^{\frac{3}{2}}$$

siendo las bases iguales, igualamos los exponentes, es decir:

$$\frac{7x}{3}=\frac{3}{2}\rightarrow \boxed{x=\frac{9}{14}}$$ Rpta.

IDENTIDADES FUNDAMENTALES DE LOS LOGARITMOS

Estas identidades nos permite efectuar cálculos rápidos en logaritmos, tan es así que los problemas anteriores pueden efectuarse por simple inspección.

IDENTIDAD FUNDAMENTAL Nº 1

Si el número y la base de un logaritmo se pueden expresar en una base común, el logaritmo está determinado por el cociente de los exponentes de las bases comunes; es decir:

$$\text{Log}_{a^n}a^m=\frac{m}{n} \quad : \quad (a>0 \;\wedge\; a\neq 1)$$

Demostración:

Por identidad sabemos que $a^m=a^m$

Expresando convenientemente el segundo miembro tendríamos:

$$a^m=\left[a^n\right]^{\frac{m}{n}}$$

$\frac{m}{n}$ ← Logaritmo; a^m ← Número; a^n ← base

Luego por definición de logaritmo como exponente; obtenemos:

$$\boxed{\text{Log}_{a^n}a^m=\frac{m}{n}}$$ L.q.q.d.

Prob. # 2.- Calcular el valor de:

$$E=\text{Log}_{4\sqrt{2}}2\sqrt[3]{2}-\text{Log}_{25}5\sqrt[3]{5}$$

Solución:

Expresando en base "2" y base "5" los logaritmos respectivos, tendríamos:

$$E=\text{Log}_{2^2\sqrt{2}}2\sqrt[3]{2}-\text{Log}_{5^2}5\sqrt[3]{5}$$

$$E=\text{Log}_{2^{\frac{5}{2}}}2^{\frac{4}{3}}-\text{Log}_{5^2}5^{\frac{4}{3}}$$

Como : $\boxed{\text{Log}_{a^n}a^m=\frac{m}{n}}$

entonces:

$$E=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{2}}-\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{1}}=\frac{8}{15}-\frac{2}{3}; \quad \text{mcm}=15$$

$$E=\frac{8-10}{15}\rightarrow \boxed{E=-\frac{2}{15}}$$

IDENTIDAD FUNDAMENTAL Nº 2

Si el logaritmo de un número se encuentra como exponente de su propia base, entonces está expresión es equivalente al número, es decir:

$$\boxed{b^{\text{Log}_b N}=N}$$

Demostración:

Por definición sabemos que:

$$\boxed{\text{Log}_b N=a \leftrightarrow b^a=N}$$

De donde:

$$b^{a} = N \quad .... (3)$$
$$a = \operatorname{Log}_b N .... (2)$$

Reemplazando ...(2) en ...(1) obtenemos:

$$\boxed{b^{\operatorname{Log}_b N} = N} \qquad \text{L.q.q.d.}$$

IDENTIDAD FUNDAMENTAL Nº 3

Si al número y a la base de un logaritmo se potencian o se extraen radicales de un mismo índice, el logaritmo no se altera, es decir:

$$\boxed{\operatorname{Log}_b a = \operatorname{Log}_{b^m} a^m = \operatorname{Log}_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{a}}$$

Demostración:
Sabemos por la identidad Nº 2 que:

$$a = b^{\operatorname{Log}_b a} \quad ....(1)$$

Elevando a la potencia "m" los dos miembros de la igualdad, se obtiene.

$$\underset{\text{Número}}{a^m} = \left[\underset{\text{base}}{b}^{m}\right]^{\overset{\text{Exponente o logaritmo}}{\operatorname{Log}_b a}}$$

Por definición de logaritmo como exponente, tenemos que:

$$\boxed{\operatorname{Log}_b a = \operatorname{Log}_{b^m} a^m} \quad .... (\alpha)$$

de otro lado en ... (1) extraemos la $\sqrt[n]{\ }$ a los dos miembros de la igualdad, obteniendo:

$$\underset{\text{Número}}{\sqrt[n]{a}} = \left[\underset{\text{base}}{\sqrt[n]{b}}\right]^{\overset{\text{Exponente o logaritmo}}{\operatorname{Log}_b a}}$$

Por definición de logaritmo como exponente, vemos que:

$$\boxed{\operatorname{Log}_b a = \operatorname{Log}_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{a}} \quad .... (\beta)$$

De ... (α) y .. (β) concluimos que:

$$\operatorname{Log}_b a = \operatorname{Log}_{b^m} a^m = \operatorname{Log}_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{a} \quad \text{L.q.q.d.}$$

Ejemplo.- Para que valor de "x" se cumple la igualdad:

$$\operatorname{Log}_{\sqrt[3]{2}} x + \operatorname{Log}_4 x^3 = 9$$

Solución
En estos casos las bases de los logaritmos deben ser iguales y para eso hacemos lo siguiente:

1. En el primer logaritmo el número y la base lo elevamos al exponente 3.
2. En el segundo logaritmo al número y a la base le extraemos $\sqrt{\ }$

Obteniendo:

$$\operatorname{Log}_2 x^3 + \operatorname{Log}_2 \sqrt{x^3} = 9$$

Como una suma de logaritmos de igual base es igual al logaritmo de un producto, entonces:

$$\operatorname{Log}_2 x^3 \sqrt{x^3} = 9 \rightarrow x^3 \sqrt{x^3} = 2^9$$

$$x^{\frac{9}{2}} = 2^9$$

de donde al simplificar obtenemos:

$$x^{\frac{1}{2}} = 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 4}$$

IDENTIDAD FUNDAMENTAL Nº 4

Si el logaritmo de un número "a" en base "b" se encuentra como exponente de una base c (c > o); el número "a" y la base "c" se pueden permutar, es decir:

$$\boxed{c^{\text{Log}_b a} = a^{\text{Log}_b c}}$$

Demostración:
Por identidad sabemos que:

$$\text{Log}_b a \bullet \text{Log}_b c = \text{Log}_b c \bullet \text{Log}_b a$$

Por la fórmula:

$$b\,\text{Log}_c a = \text{Log}_c a^b$$

Se tendría:

$$\log_b c^{\text{Log}_b a} = \log_b a^{\text{Log}_b c}$$

Cancelando los logaritmos en base "b" obtenemos:

$$\boxed{c^{\text{Log}_b a} = a^{\text{Log}_b c}} \quad \text{L.q.q.d}$$

IDENTIDAD FUNDAMENTAL Nº 5

Si el producto del número y la base de un logaritmo es igual a la unidad, entonces su logaritmo es igual a – 1; es decir:

Si : $\boxed{N.b = 1 \Rightarrow \text{Log}_b N = -1}$

Demostración:

Siendo Nb = 1 $\rightarrow N = \frac{1}{b}$

ó . $N = b^{-1}$

con lo cual : $\text{Log}_b N = \text{Log}_b b^{-1}$

Aplicando la primera identidad obtenemos:

$$\boxed{\text{Log}_b N = -1} \qquad \text{L.q.q.d.}$$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Si; "b" es un número real positivo diferente de "1" ($b > 0 \wedge b \neq 1$) entonces la función "f" se llama exponencial de base "b" si y sólo si:

$$\boxed{f = \{ (x, y) \,/\, y = b^x \,.\, (b > 0 \;\wedge b \neq 1) \}}$$

Representación gráfica de: $\boxed{y = b^x}$

i) Primer caso.- Cuando la base está comprendida entre "0" y "1"
($0 < b < 1$)

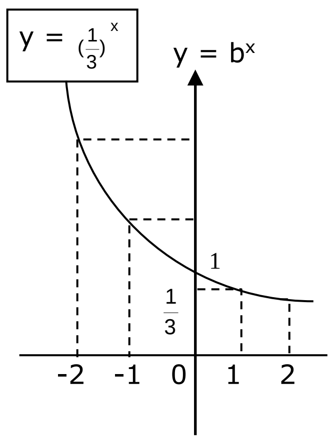
Caso Particular: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Tabulando, obtenemos los siguientes pares de valores:

Df	X	-∞	....	-2	-1	0	1	2	...	+∞
Rf	Y	+∞	....	9	3	1	1/3	1/9	...	0

Gráfica :

Propiedades de:
$y = b^x : 0 < b < 1$

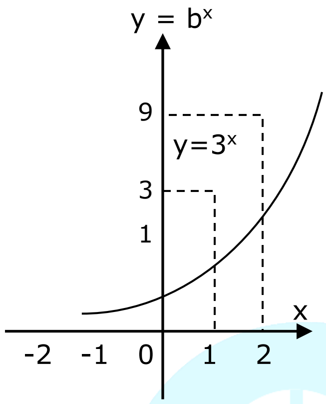


1. $D_1 \in R$
2. $R_f \in <0 \;;\; \infty>$
3. $y = b^x > \;\forall\, x \in R$
4. Si; $x = 0 \rightarrow y = b^x = 1$
5. Si, $x < 0 \rightarrow y = b^x > 1$
6. Si, $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y = b^x \rightarrow \infty$
7. Si, $x > 0 \;\Rightarrow y = b^x < 1$
8. Si, $x \rightarrow \infty \rightarrow y = b^x \rightarrow 0$

ii) Segundo caso.- Cuando la base es mayor a la unidad ($b > 1$)
Caso particular; $y = 3^x$
Tabulando : obtenemos los valores:

D_f	X	$-\infty$	...	-2	-1	0	1	2	...	$+\infty$
R_f	Y	$+\infty$	...	1/9	1/3	1	3	9	...	$+\infty$

Gráfica:



Propiedades de:
$y = b^x : (b > 1)$

1. $D_1 \in <-\infty; \infty>$
2. $R_f \in <0; \infty>$
3. $y = b^x > 0 \ \forall \ x \in R$
4. Si; $x = 0 \rightarrow y = b^x = 1$
5. Si, $x < 0 \rightarrow y = b^x < 1$
6. Si, $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y = b^x \rightarrow 0$
7. Si, $x > 0 \Rightarrow y = b^x > 1$
8. Si, $x \rightarrow \infty \rightarrow y = b^x \rightarrow \infty$

Función Logarítmica

Si "b" es un número real positivo diferente de la unidad entonces una función "f" será logarítmica si y solo si:

$$\boxed{f = \{(x, y)/ \ y = \text{Log}_b x \ ; \ (b > 0 \ \wedge \ b \neq 1)\}}$$

al cual llamaremos << función logaritmo de base b">>

Observación:

Función Exponencial	Función Logarítmica
$y = f(x) = b^x$	$y = f(x) = \text{Log}_b \ x$
$D_f \in <-\infty \ ; \ \infty>$ $R_f \in <0 \ ; \ \infty>$	$D_f \in <0 \ ; \ \infty>$ $R_f \in <-\infty \ ; \ \infty>$

Nótese que:
$\forall \ b \in R^+ - \{1\}$

$\boxed{y = b^x} \rightarrow \boxed{\text{Log}_b y = x}$

Función Directa

$\downarrow$
Permutando "x" por "y"
$\downarrow$

$\boxed{Y = \text{Log}_b x}$

Función Inversa

Representación gráfica de:
$\boxed{y = \text{Log}_b x}$

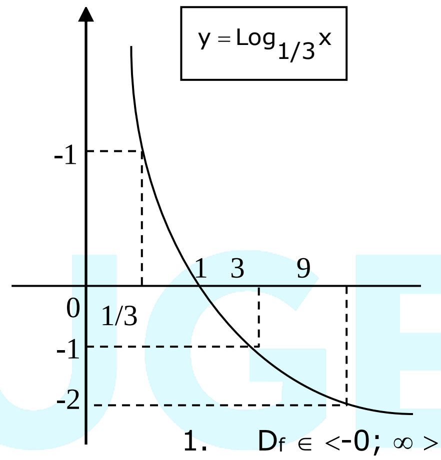
i) Primer caso: Cuando la base está comprendida entre "0" y "1" ($0< b < 1$)
Caso particular: $y = \text{Log}_{\frac{1}{3}} x$

Tabulando; obtenemos los valores

D_f	X	0	...	1/9	1/3	1	3	9	...	$+\infty$
R_f	Y	∞	...	2	1	0	-1	-2	...	$-\infty$

Gráfica :
$y = \text{Log}_b x$

Propiedades de:
$y = \text{Log}_b x \ ; \ (0< b< 1)$



1. $D_f \in <-0; \infty>$
2. $R_f \in <-\infty; \infty>$
3. Si, $x< 0 \rightarrow \text{Log}_b x \nexists$ en R
4. $\text{Log}_b b = 1$
5. $\text{Log}_b 1 = 0$
6. Si $x > 1 \Rightarrow \text{Log}_b x < 0$
7. Si: $x \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Log}_b x \rightarrow -\infty$
8. Si: $x < 1 \rightarrow \text{Log}_b x > 1$
9. Si : $x \rightarrow 0 \quad \text{Log}_b x \rightarrow \infty$

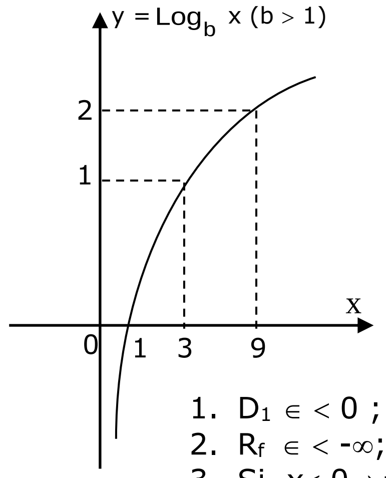
ii) Segundo caso: Cuando la base es mayor que la unidad ($b > 1$)

Caso particular:
$y = \text{Log}_3 x$

Tabulando, obtenemos los valores:

D_f	X	0	…	1/9	1/3	1	3	9	…	$+\infty$
R_f	Y	$-\infty$	…	-2	-1	0	1	2	…	$+\infty$

Gráfica:
$y = \text{Log}_b\ x\ (b > 1)$

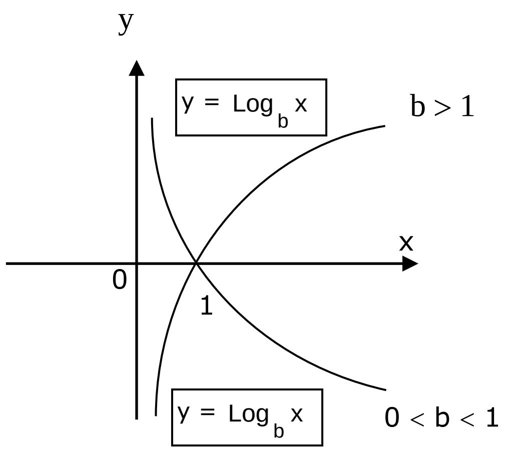


Propiedades de:
$y = \text{Log}_b\ x;\ (b > 1)$

1. $D_1 \in \langle 0\ ;\ \infty \rangle$
2. $R_f \in \langle -\infty;\ \infty \rangle$
3. Si, $x < 0 \rightarrow \text{Log}_b\, x \ \exists$ en R
4. $\text{Log}_b b = 1$
5. $\text{Log}_b 1 = 0$
6. Si $x > 1 \Rightarrow \text{Log}_b\, x < 0$
7. Si: $x \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Log}_b\, x \rightarrow \infty$
8. Si: $x < 1 \Rightarrow \text{Log}_b\, x < 0$
9. Si: $x \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Log}_b\, x \rightarrow -\infty$

PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS

Teniendo en cuenta las gráficas de la función logaritmo:
$y = \text{Log}_b\ x\ (b > 0 \wedge b \neq 1)$



Deducimos las siguientes propiedades:

I. Existen infinitos sistemas, donde cada valor de b ($b > 0 \wedge b \neq 1$) es un sistema de logaritmos.

II. No existen logaritmos de números negativos en el campo de los números reales, pero si en el campo de los números complejos.

III. El logaritmo de "1" en cualquier base vale "0" y el logaritmo de la base es igual a "1", en efecto:

i) $\boxed{\text{Log}_b\ 1 = 0 \ \rightarrow b^0 = 1}$

ii) $\boxed{\text{Log}_b\ b = 1 \ \rightarrow b^1 = b}$

IV. El logaritmo de un producto indicado es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\boxed{\text{Log}_x\, ab = \text{Log}_x\, a + \text{Log}_x\, b}$$

Demostración:

$\boxed{b^{\text{Log}_b N} = N}$ $\Rightarrow$ vemos que:

$a = x^{\log_x a}$ ……….. (1)

$a = x^{\log_x b}$ ……….. (2)

Multiplicando … (1) y … (2) m.a.m. obtenemos:

$$ab = x^{\text{Log}_b a + \text{Log}_x b}$$

Por definición de logaritmo como exponente, se obtiene:

$\boxed{\text{Log}_x\, ab = \text{Log}_x\, a + \text{Log}_x\, b}$ L.q.q.d.

V. El logaritmo de un cociente indicado es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, es decir:

$$\boxed{\text{Log}_x \frac{a}{b} = \text{Log}_x a + \text{Log}_x b}$$

Demostración:
Teniendo en cuenta que:

$$a = x^{\log_x a} \quad \text{..........} \quad (1)$$

$$a = x^{\log_x b} \quad \text{..........} \quad (2)$$

Dividiendo m.a.m. (1).. (2) obtenemos:

$$\text{Log}_x \frac{a}{b} = \text{Log}_x a - \text{Log}_x b \qquad \text{L.q.q.d.}$$

VI. El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base, es decir:

$$\boxed{\text{Log}_x a^b = b\text{Log}_x a} \quad \text{L.q.q.d.}$$

Demostración:

En la identidad fundamental:

$$a = x^{\text{Log}_x a} \quad \text{............} \ (1)$$

Elevando al exponente "b" m.a.m. obtenemos:

$$a^b = x^{b\,\text{Log}_x a}$$

por definición de logaritmo como exponente, se obtiene:

$$\boxed{\text{Log}_x a^b = b\,\text{Log}_x a} \qquad \text{L.q.q.d.}$$

VII. El logaritmo de una raíz es igual a la inversa del índice del radical por el logaritmo de la cantidad subradical, es decir:

$$\text{Log}_x \sqrt[b]{a} = \frac{1}{b}\text{Log}_x a$$

Demostración:

Teniendo en cuenta la identidad:

$$a = x^{\text{Log}_x a} \quad \text{..........} \ (1)$$

Al elevar a la potencia $\frac{1}{b}$ obtenemos:

$$a^{\frac{1}{b}} = x^{\frac{1}{b}\text{Log}_x a}$$

$$\sqrt[b]{a} = x^{\frac{1}{b}\text{Log}_x a}$$

Por definición de logaritmos como exponente, se obtiene:

$$\boxed{\text{Log}_x \sqrt[b]{a} = \frac{1}{b}\text{Log}_x a} \qquad \text{L.q.q.d}$$

VIII. El producto de dos logaritmos recíprocos es igual a la "unidad", es decir:

$$\boxed{\text{Log}_x a \bullet b\,\text{Log}_a b = 1} \qquad \text{L.q.q.d}$$

RELACIONES ESPECIALES EN LOGARITMOS

COLOGARITMO.- El cologaritmo de un número en una base "b" es igual al logaritmo de la inversa del número en la misma base.

$$\text{Colog}_b N = \text{Log}_b \frac{1}{N}$$

Ejemplo:

a) $\operatorname{colog}_9 27 = -\operatorname{Log}_9 27 = -\dfrac{3}{2}$

b) $-\operatorname{colog}_{a\sqrt[3]{a^2}} a^2\sqrt[3]{a} = \operatorname{Log}_{a^{\frac{5}{3}}} a^{\frac{7}{3}} = \dfrac{7}{5}$

ANTILOGARITMO

El antilogaritmo en una base dada es el número que dá origen al logaritmo, matemáticamente:

$$\operatorname{Antilog}_a x = a^x$$

Propiedades:

$$\boxed{\operatorname{Antilog}_b \operatorname{Log}_b N = N}$$

$$\boxed{\operatorname{Log}_b \operatorname{Antilog}_b N = N}$$

Ejemplos:

a) $\operatorname{Antilog}_2 3 = 2^3 = 8$

b) $\operatorname{Antilog}_4 -1/2 = 4^{-1/2} = \dfrac{1}{2}$

CAMBIO DE BASE “b” A BASE “x”

En general todo cambio de base implica un cociente de logaritmos, es decir:

$$\operatorname{Log}_b N = \frac{\operatorname{Log}_x N}{\operatorname{Log}_b N}$$

Caso particular: $\operatorname{Log}_b N = \dfrac{\operatorname{Log} N}{\operatorname{Log} b}$

REGLA DE LA CADENA

Si en un producto de logaritmos un número cualquiera y una base cualquiera son iguales entonces estos se cancelan incluso el símbolo logarítmico

$$\boxed{\operatorname{Log}_b a \cdot \operatorname{Log}_c b \cdot \operatorname{Log}_d c \cdot \operatorname{Log}_x d = \operatorname{Log}_x a}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Los sistemas de ecuaciones logarítmicas se caracterizan por que tienen las mismas soluciones para cada ecuación que se presenta dentro del sistema.
La solución a un sistema depende en gran parte de la habilidad del operador, sustentado en las propiedades logarítmicas.

INTERÉS COMPUESTO
ANUALIDADES
BINOMIO DE NEWTON

INTERÉS COMPUESTO

Un capital se impone a interés compuesto cuando en cada unidad de tiempo (generalmente cada año), los intereses producidos se adicionarán al capital, de tal modo que en la siguiente unidad de tiempo, el nuevo capital también produce intereses.
Debemos tener en cuenta la siguiente notación:

M : Monto = Capital + intereses

C : Capital impuesto

R : tanto por ciento anual; es el interés Producido por 100 soles en 1 año

r : tanto por uno ($r = \frac{R}{100}$, es el interés producido por un 1 sol en un año)

t : tiempo que se impone el capital, generalmente en años

DEDUCCIÓN DEL MONTO

Dado un capital C que se impone al interés compuesto al "r" por uno anual, durante un determinado tiempo de "t" años. Calcular el monto "M" que se obtiene al final de este tiempo.

Deducción:
Sabemos que el monto al final del año es igual al capital más el interés, es decir:

$$\boxed{\text{Capital + Interés = Monto}}$$

Por consiguiente:
En el primer año:

$$C + Cr = C(1 + r)$$

En el segundo año:

$$C(1 + r) + C(1 + r)r = C(1 + r)^2$$

En el tercer año:

$$C(1 + r)^2 + C(1 + r)^2 r = C(1 + r)^3$$

En el "t" año

$$C(1 + r)^{t-1} + C(1 + r)^{t-1} r = C(1 + r)^t$$

Vemos que el monto obtenido por un capital "C" al "r" por uno de interés compuesto durante "t" años, es:

$$\boxed{M = C(1 + r)^t}$$

De esta formula podemos despejar:

a) El capital: "C":

$$\boxed{C = \frac{M}{(1+r)^t}}$$

b) El tanto por uno: "r"

$$\boxed{r = \sqrt[t]{\frac{M}{C}} - 1}$$

c) El tiempo: "t"

$$\boxed{t = \frac{\text{LogM} - \text{LogC}}{\text{Log}(1+r)}}$$

EJERCICIOS

01. Hallar el monto que se obtiene al imponer un capital de 7 500 soles al 5% de interés compuesto, durante 8 años.
Dato: $(1,05)^8 = 1,477455$

Solución:
Del enunciado, tenemos:
C = 7 500
R = 5%
$r = \frac{5}{100} = 0,05$
t = 8 años
Reemplazando en la fórmula:

$$\boxed{M = C\,(1 + r)^t}$$

Obtenemos:
$M = 7\,500\,(1 + 0,05)^8$
$M = 7\,500\,(1,05)^8$
Considerando el dato, el monto será:
$M = 7\,500\,(1,477455)$
M = 11 080 92 soles (Rpta).

02. Un cierto tipo de bacterias se reproduce en forma muy rápida de modo que en una hora aumenta su volumen en un 75%. Cuántas horas serán necesarias para que su volumen sea 70 veces su volumen original?

Datos: $\begin{cases} \text{Log } 7 = 0,845098 \\ \text{Log } 1,75 = 0,243038 \end{cases}$

Solución :
Consideremos un volumen "V" como si fuera el capital depositado a interés compuesto, 70 "V" será el volumen final

Donde: R = 75% $\rightarrow r = \frac{R}{100} = 0,75.$

Reemplazando en la fórmula de monto:

$M = C\,(1 + r)^t$ $M = \begin{cases} C = V \\ 70\text{ V} \\ r = 0,75 \end{cases}$

Se tendría:

$70\text{ V} = \text{V}\,(1 + 0,75)^t$
$70 = (1,075)^t$

tomando logaritmos en ambos miembros, obtenemos:

$$t = \frac{\text{Log } 70}{\text{Log } 1,75}$$

$$t = \frac{\text{Log } 7 + \text{Log } 10}{\text{Log } 1,75}$$

$$t = \frac{0,845098 + 1}{0,243038}$$

De donde:

$\boxed{t = 7,59 \text{ horas}}$ Rpta.

Observación: En la fórmula del monto : $M = C\,(1 + r)^t$; el exponente "t" y el tanto por uno "r" siempre van expresados en la misma unidad, según sea el período al fin del cual se capitalizan los intereses, es decir:

capitalización	Tiempo	Tanto por uno
Anual	t (en años)	r (anual)
Semestral	2 t	r/2
Trimestral	4 t	r/4
Mensual	12 t	r/12
Diaria	300 t	r/360

03. En cuanto se convertirá 50 000.00 soles, impuesto al 5% anual, durante 6 años, capitalizándose los intereses cada trimestre?
Dato: $(1,0125)^{24} = 1,347$

Solución:
De acuerdo con el enunciado del problema:
C = 50 000.00 soles
R = 5% anual

$r = \frac{5}{100} = 0{,}05$ (anual)

$r = \frac{0{,}05}{4} = 0{,}0125$ (trimestral)

t = 6 años = 6(4) = 24 trimestres

Reemplazando en la fórmula del monto

$$\boxed{M = C\,(1 + r)^t}$$

Se tendría:
$M = 50\,000\,(1 + 0{,}0125)^{24}$
$M = 50\,000\,(1{,}0125)^{24}$

Utilizando el dato:
M = 50 000 (1,347)

el monto será:
M = 67 350,00 soles (Rpta).

ANUALIDADES

Definición.- Se llama anualidad a la cantidad fija que se impone todos los años para formar un capital o en su defecto amortizar una deuda.

Anualidad de capitalización.- Se denota por "A_c" y es la cantidad fija que se impone al principio de cada año al "r" por uno de interés compuesto para formar un capital "C", en un tiempo "t".

Siendo "t" el tiempo en el cual se desea formar el capital "C", colocando las anualidades al principio de cada año., vemos que:

La primera "A_c"durante "t" años nos dá un monto de $A_c\,(1 + r)^t$
La segunda "A_c" durante (t – 1) años nos da un monto de $A_c\,(1 + r)^{t-1}$

La última anualidad A_c, durante 1 año, su monto será: $A_c\,(1 + r)$
Sumando todos los montos producidos por las anualidades, formamos el capital "C".

$C = A_c(1+r)^t + A_c(1+r)^{t-1} + ... + A_c(1 + r)$
$C = A_c[(1+r)^t + (1+r)^{t-1} + ... + (1 + r)]$
Factorizando : (1 + r)
$C = A_c(1+r)\,[(1+r)^{t-1} + (1 + r)^{t-2} + ... + 1]$
Como los sumados del corchete representan el desarrollo de un cociente notable, obtenemos:

$$\boxed{C = A_c(1+r)\left[\frac{(1+r)^t - 1}{(1+r) - 1}\right]}$$

Despejando la anualidad de capitalización:

$$\boxed{A_c = \frac{C \cdot r}{(1+r)\,\left[(1+r)^t - 1\right]}}$$

Anualidad de Amortización.- Es la cantidad fija que se impone al final de cada año al "r" por uno de intereses compuesto para amortizar una deuda "C" y los intereses que produce, a interés compuesto, en un tiempo "t".

Siendo "t" el tiempo en el cual se debe pagar el capital prestado "C" más sus intereses, colocando las anualidades al final de cada año, se observa que:

La primera anualidad impuesta durante (t – 1) años, nos da un monto de :

$$A_a\,(1 + r)^{t-1}$$

La segunda anualidad impuesta durante (t-2) años, nos da un monto de : $A_a\ (1 + r)^{t-2}$

La última anualidad impuesta durante el último año es A_a.

La suma de los montos producidos por las anualidades equivalen al capital prestado más los intereses producidos, es decir: $C\ (1 + r)^{t}$; con lo cual se tendría la ecuación:

$$C(1+r)^t = A_a\,(1+r)^{t-1} + A_a\,(1+r)^{t-2} \ldots + A_a$$

Factorizando "A_a" en el 2do. Miembro:

$$C\,(1+r)^t = A_a\left[(1+r)^{t-1} + (1+r)^{t-2} + \ldots + 1\right]$$

Por cocientes notables (reconstrucción)

$$C\,(1+r)^t = A_a\left[\frac{(1+r)^{t-1}}{(1+r)-1}\right]$$

Por consiguiente:
La anualidad de amortización "A_a" para pagar el capital prestado "C" está formulado por:

$$A_a = \frac{C.\,r(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}$$

Ejemplo:
Se acordó la compra de un terreno en 150 000 soles, cuya cantidad se tomó a préstamos al 4% amortizable en 15 años. ¿Qué cantidad fija se debe imponer a final de cada año para cancelar el préstamo más sus intereses?
Dato: $(1{,}04)^{15} = 1{,}8$

Solución: Del anunciado tenemos que:
C = 150 000 soles
R = 4%

$$r = \frac{4}{100} = 0{,}04$$

Reemplazando:

$$A_a = \frac{(150\,000)\,(0{,}04)\,(1+0{,}04)^{15}}{(1+0{,}04)^{15} - 1}$$

$$A_a = \frac{(150\,000)\,(0{,}04)\,(1{,}04)^{15}}{(1{,}04)^{15} - 1}$$

$$\boxed{A_a = 13491{,}2 \text{ soles}}$$

BINOMIO DE NEWTON

Factorial de un número natural.- Es el producto de todos los números enteros positivos y consecutivos desde el número 1 hasta n inclusive; su notación es:

$n!$ ó $\lfloor\underline{n}$; se lee "factorial del número "n"

Así tenemos:
a) $\lfloor\underline{6} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 = 6!$
b) $\lfloor\underline{3} = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$
c) $\lfloor\underline{4} = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

En general:

$$\boxed{n! = \lfloor\underline{n} = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times (n-1) \times n}$$

Observemos que:

$\lfloor\underline{-3}$ = No existe

$\lfloor\underline{\tfrac{5}{2}}$ = No existe

$-\lfloor\underline{3} = -1 \times 2 \times 3 = -6$

$$\frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{2}} = \frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2} = 60$$

PROPIEDADES

1. El factorial de un número se puede descomponer como el producto del factorial de un número menor, multiplicado por todos los consecutivos hasta el número de consideración, es decir

$$\lfloor\underline{12} = \lfloor\underline{9} \times 10 \times 11 \times 2$$

$$\lfloor\underline{26} = \lfloor\underline{16} \times 17 \times 18 \ldots\ldots\ldots\ldots \times 25 \times 26$$

En general:

$$\boxed{\lfloor\underline{n} = \lfloor\underline{n-k}\;(n-k+1)\,(n-k+2)\,\ldots\ldots\,(n-1)\,n}$$

donde : $k \le n$

Simplificar : $E = \dfrac{\lfloor\underline{5} \times \lfloor\underline{18}}{\lfloor\underline{6} \times \lfloor\underline{17}}$

Solución:

Descomponiendo los factoriales:

$$E = \frac{\cancel{\lfloor\underline{5}} \times \cancel{\lfloor\underline{17}} \times 18}{\cancel{\lfloor\underline{5}} \times 6 \times \cancel{\lfloor\underline{17}}} = \frac{18}{6}$$

$\therefore\ E = 3$ Rpta.

2. Si el factorial del número A es igual al factorial del número B, entonces A y B son iguales, es decir:

$\boxed{\lfloor\underline{A} = \lfloor\underline{B} \Leftrightarrow A = B}$ $(A \ne 0 \wedge B \ne 0)$

Ejemplo: Calcular los valores de "n"
Si:
$(\lfloor\underline{n})^2 - 8\lfloor\underline{n} + 12 = 0$

Solución:
Factorizando; tendríamos:

$(\lfloor\underline{n} - 2)\ (\lfloor\underline{n} - 6) = 0$

igualando cada factor a cero:

a) $\lfloor\underline{n} = 2 = \lfloor\underline{2} \Rightarrow n = 2$

a) $\lfloor\underline{n} = 6 = \lfloor\underline{3} \Rightarrow n = 3$

$\therefore$ C.S. = $\{2, 3\}$ Rpta.

Observación: El factorial de cero es igual a la unidad, es decir:

$\therefore\ \boxed{0\,! = \lfloor\underline{0} = 1}$; Demostración :

Dado que; $\lfloor\underline{n} = \lfloor\underline{n-1} \times n$

para : $n = 1 \rightarrow \lfloor\underline{1} = \lfloor\underline{0} \times 1$

$\therefore\ \boxed{0\,! = \lfloor\underline{0} = 1}$

3. Si el factorial de un número "n" es igual a uno, entonces el valor de "n" puede ser cero o la unidad

$\boxed{n = 1 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 1}$

Ejemplo: Hallar "n", si:
$(n-2)\,! = 1$

Solución:

$$(n-2)\,! = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{i) } n-2 = 0 \rightarrow \boxed{n = 2} \\ \text{ii) } n-2 = 1 \rightarrow \boxed{n = 3} \end{cases}$$

$\therefore$ C.S. = $\{2\ ;\ 3\}$ Rpta.

EJERCICIOS

1 ¿Qué valor de n" verifica la siguiente igualdad:

$$1024\,\lfloor\underline{n-1}\,[1 \times 3 \times 5 \ldots \times (2n-3)] = \lfloor\underline{2\,(n-1)}$$

Solución:

Dado que:

$1 \times 3 \times 5 \ldots \times (2n-3) =$

$$= \frac{1x2x3x4x5\ldots x(2n-3)(2n-2)}{2x4x6x\ldots\ldots x(2n-2)}$$

$$1 \times 3 \times 5 \ldots \times (2n-3) = \frac{\lfloor\underline{2n-2}}{2^{n-1}\lfloor\underline{n-1}}$$

la igualdad se transforma en:

$$1024\,\lfloor\underline{n-1} \times \frac{\lfloor\underline{2n-2}}{2^{n-1}\lfloor\underline{n-1}} = \lfloor\underline{2n-2}$$

cancelando los factores comunes obtenemos:

$2^{n-1} = 1024 \rightarrow 2^{n-1} = 2^{10}$

$\therefore\ n - 1 = 10$

$\Rightarrow \boxed{n = 11}$ Rpta.

② Si se cumple la relación:

$1\lfloor\underline{1} + 2\lfloor\underline{2} + 3 + \lfloor\underline{3} + \ldots + n\lfloor\underline{n} = 2069$

Hallar el valor de n.

Solución

Cada coeficiente de los términos el primer miembro, se puede expresar de la siguiente forma:

$(2-1)\ \lfloor\underline{1} + (3\text{-}1)\lfloor\underline{2} + (4\text{-}1)\ \lfloor\underline{3} + \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots + (n+1\ -1)\lfloor\underline{n}\ = 5039$

de donde el operar, obtenemos:

$\lfloor\underline{2}\ - \lfloor\underline{1}\ + \lfloor\underline{3}\ -\ \lfloor\underline{2} + \lfloor\underline{4}\ - \lfloor\underline{3} + \ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots + \lfloor\underline{(n+1}\ - \lfloor\underline{n}\ = 5039$

al cancelar, los términos semejantes, se tendría:

$-1\ + \lfloor\underline{n+1} = 5039$

$\lfloor\underline{n+1} = 5040$

$\lfloor\underline{n+1}\ = \lfloor\underline{7}$

$\therefore\ n + 1 = 7 \ \rightarrow \boxed{n = 6}$ Rpta.

ANÁLISIS COMBINATORIO

Permutaciones.- Permutaciones de "n" elementos tomados en grupos de "n" son los diferentes grupos que se forman en el cual participando "n" elementos en cada grupo, estos se diferencian por el orden de colocación; matemáticamente:

$$\boxed{P_n = n\,! = \lfloor\underline{n}}$$

Ejemplo: Permutar "a", "b" y "c"

Solución:

La permutación de "a , b" y "c" es:

$P_{abc} = \{abc;\ acb;\ bac;\ bca;\ cab;\ cba\}$

$P_3 = 3\,! = 6$ grupos; en cada grupo hay 3 elementos, que se diferencian por el orden de colocación.

Variaciones.- Variaciones de "n" elementos tomados en grupos de "k" en "k" son los diferentes grupos que se forman en el cual participando "k" elementos en cada grupo estos se diferencian al menos por un elemento o por el orden de colocación; matemáticamente:

$$\boxed{V_k^n = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-k}}}$$

$$\boxed{V_k^n = \underbrace{(n)\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots\,(n-k+1)}_{k\ \text{factores}}}$$

Ejm: Variar "a", "b" y "c" de 2 en 2.

$$V_2^{a,b,c} = \{\,ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb\,\}$$

$$V_2^3 = \frac{\lfloor\underline{3}}{\lfloor\underline{3-2}} = \frac{\lfloor\underline{3}}{\lfloor\underline{1}} = \frac{1\times2\times3}{1} = 6$$

Combinaciones.- Combinatoria de "n" elementos, tomados en grupo de "k" en "k" son los diferentes grupos que se forman, en el cual participando "k" elementos en cada grupo estos se diferencian al menos por un elemento, matemáticamente :

$$\boxed{C_k^n = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{k}\ \lfloor\underline{n-k}}}\ ;\ k \le n$$

$$\boxed{C_k^n = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)}{1\times2\times3\times\ldots\ldots\ldots\times k}}$$

Ejm.: Combinar, "a", "b" y "c" de 2 en 2

Solución

$C_2^{a,b,c} = \{ab, ac, bc\}$

$$C_2^3 = \frac{\lfloor 3}{\lfloor 2 \ \lfloor 1} = \frac{1x2x3}{1x2x1}$$

$C_2^3 = 3$; grupos en el cual un grupo es diferente del otro por el orden de colocación.

Propiedades:

1) $C_k^n = C_{n-k}^n$

2) $C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$

3) $C_{k+1}^{n+1} = \frac{n+1}{k+1} C_k^n$

4) $C_{k-1}^{n-1} = \frac{k}{n} C_k^n$

5) $$\begin{cases} C_a^m = C_b^n \Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ \wedge \\ a = b \end{cases} \\ C_a^m = C_b^n \Leftrightarrow \begin{cases} m = n \\ \wedge \\ a + b = m = n \end{cases} \end{cases}$$

6) $C_0^n = C_1^n = n$

BINOMIO DE NEWTON

Es una fórmula que nos permite encontrar el desarrollo de un binomio elevado a cualquier exponente.

Deducción del binomio para exponente entero y positivo.

1. $(a+b)^1 = a+b$
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

De estos desarrollos observamos :

1. El desarrollo es un polinomio homogéneo, cuyo grado es igual al exponente del binomio.
2. El número de términos que tiene el desarrollo es igual al exponente del binomio más uno.
3. Los exponentes en el desarrollo varían consecutivamente desde el exponente del binomio hasta el expediente cero en forma descendente y ascendente con respecto a "a" y "b".
4. Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos en el desarrollo son iguales.
5. En el desarrollo, cada coeficiente es igual al coeficiente anterior multiplicado por el exponente de "a" y dividido entre el exponente de "b" más uno.
6. La suma de los coeficientes del desarrollo es igual al número 2 elevado al exponente del binomio.
7. Si en el binomio, su signo central es negativo, los signos en el desarrollo, son alternados.

De acuerdo a estas observaciones tendríamos la siguiente forma genérica.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3}b^3 + \dots\dots\dots + b^n$$

Coeficientes Binomiales.- Son los coeficientes de los términos del desarrollo de $(a+b)^n$, donde n puede ser entero, fraccionario, positivo y/o negativo.

i. En el binomio de newton si n es entero y positivo, su coeficiente binomial es:

$$C_k^n = \frac{n(n-1)(n-2)..........(n-k+1)}{k!}$$

ii. Si n es fraccionario, su coeficiente binomial es :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2).........\ (n-k+1)}{k!}$$

De acuerdo a esto, se tendría.

$(a+b)^n = c^n_0\ a^n + c^n\ ,\ a^{n-1}b + ...\ c^n_n\ n^b$

TRIANGULO DE PASCAL

Es un triángulo en el cual, un coeficiente cualquiera es igual a la suma de los dos que van sobre el en la línea anterior. Es práctico cuando los exponentes del binomio son pequeños.

Ejemplos : Para hallar los coeficientes de $(a+b)^6$; su triángulo de Pascal sería:

$(a + b)^0 =$	1
$(a + b)^1 =$	1 1
$(a + b)^2 =$	1 2 2
$(a + b)^3 =$	1 3 3 1
$(a + b)^4 =$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5 =$	1 5 10 10 5 1
$(a + b)^6 =$	1 6 15 20 15 6 1

FORMULA PARA DETERMINAR UN TÉRMINO CUALQUIERA DEL DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON

Dado el binomio:

$$(a+b)^n = \underbrace{c_0^n a^n}_{t_1} + \underbrace{c_1^n\ a^{n-1} b}_{t_2} + \underbrace{....}_{T_K+1} + \underbrace{C_n^n b^n}_{T_n+1}$$

en su desarrollo vemos que:

$$\boxed{T_{k+1} = C_k^n (a)^{n-k} (b)^K}$$

Ejm. # 1.- Hallar el G.A. del T_{25} en el desarrollo de $(x^2 - y^3)^{26}$

Solución:

Datos : $\begin{cases} a = x^2 \\ b = -y^3 \\ n = 26 \\ k+1 = 25 \ \rightarrow\ k = 24 \end{cases}$

Reemplazando en la fórmula:

$$\boxed{T_{k+1} = C_k^n (a)^{n-k} (b)^K} \ ;\ 0 \le k \le 26$$

Obtenemos:

$$T_{24+1} = C_{24}^{26} (x^2)^{26-24} (-y^3)^{24}$$

$$T_{25} = C_{24}^{26} x^4 y^{72}$$

$\therefore$ **Grado absoluto = G.A. = 76 Rpta.**

EJERCICIOS

1. Determinar "k" en el binomio $(x+1)^{36}$, si los términos de lugares $(k - 4)$ y k^2 son iguales en sus coeficientes.

   Rpta. K = 6

2. Cuántos términos racionales hay en el desarrollo del binomio.

$$\left(\sqrt[5]{xy}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)^{50}$$

   Rpta. = 6

3. Simplificar:

$$S=\frac{C_5^{100}\bullet C_{80}^{95}+C_5^{85}}{C_{100}^{100}+C_{15}^{100}}$$

4. Hallar el G.A. del término central en el desarrollo del binomio:

$$(x^3+y^4)^{22}$$

RACIONALIZACIÓN
FORMAS INDETERMINADAS

RADICACIÓN

Definición.- Es la operación inversa a la potenciación que consiste en hallar una cantidad algebraica "b" llamada raíz de forma que al ser elevada a un cierto índice reproduce una cantidad "a" llamado radicando o cantidad subradical. Matemáticamente:

$$\boxed{\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{b})^{\mathbf{n}} = \mathbf{a}}$$

Elemento de la radicación:

Signo radical

Índice $\longrightarrow$ $\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \mathbf{b}$ $\longleftarrow$ Raíz

Radicando o cantidad el subradical

Ejm.:

a) $\sqrt[4]{81} = \pm 3 \rightarrow (\pm 3)^4 = 81$

b) $\sqrt[3]{125} = 5 \rightarrow (5)^3 = 125$

c) $\sqrt[5]{-32} = -2 \rightarrow (-2)^5 = -32$

d) $\sqrt{-16} = \pm 4i \rightarrow (\pm 4i)^2 = 16i^2 = -16$

Nota.- i; en la unidad de los números imaginarios, tal que:

$$\boxed{i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1}$$

Signos de las raíces:

a) $\sqrt[par]{+} = \pm$ (Real)

b) $\sqrt[par]{-} = \pm$ (Imaginario)

c) $\sqrt[impar]{+} = +$ (Real)

d) $\sqrt[impar]{-} = -$ (Real)

Debemos tener en cuenta las siguientes propiedades en cuanto a radicación:

I. Raíz de una potencia

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

II. Raíz de una multiplicación de varios factores

$$\boxed{\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}}$$

III. Raíz de una división

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}} \qquad \mathbf{b \neq 0}$$

IV. Raíz de raíz

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$$

RAÍZ CUADRADA DE UN POLINOMIO

Para extraer la raíz cuadrada de un polinomio, su máximo exponente (grado) debe ser par y se aplica las siguientes reglas:

1º.- Se ordena y completa el polinomio respecto a una letra – ordenatriz, luego se agrupan los términos de "dos en dos" comenzando por la última cifra.

2º.- Se halla la raíz cuadrada del primer término y obtenemos el primer término de la raíz cuadrada del polinomio. Esta raíz se eleva al cuadrado, se cambia de signo y se suma al polinomio dado, eliminando así la primera columna.

3º.- Se bajan los dos términos que forman el siguiente grupo, se duplica la raíz y se divide el primer término de los bajados entre el duplo del primer término de la raíz. El cociente obtenido es el seguido término de la raíz. Este segundo término de la raíz con su propio signo se escribe al lado del duplo del primer término de la raíz formándose un binomio; el binomio formado lo multiplicamos por el segundo término con signo cambiado, el producto se suma a los dos términos que se habían bajado.

4º.- Se baja el siguiente grupo y se repite el paso 3 y se continua el procedimiento hasta obtener un resto cuyo grado sea una unidad menor que el grado de la raíz o un polinomio de resto nulo.

Ejm.: Hallar la raíz cuadrada del polinomio

$P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

Solución:

En este problema tenemos como datos:

Pº : Grado de polinomio = 4

n : Índice de la raíz = 2

$r^o : \frac{P^o}{n}$: Grado de la raíz = $\frac{4}{2} = 2$

Rº : Grado del resto

El grado del resto es siempre menor que el grado de la raíz y su máximo grado, uno menos que el grado de la raíz multiplicada por (n – 1)

$$\boxed{R^o = (n-1)\,r^o - 1}$$

En nuestro caso:

$R^o = (2-1)\ 3^o - 1 \rightarrow R^o - 2^o$

Distribuyendo en términos tendríamos:

$\sqrt{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}$	$x^2 - 2x + 1$
$-x^4$	$(x^2)(-x^2) = -x^4$
0	$2x^2$
$-4x^3 + 6x^2$	$-4x^3 \div 2x^2 = -2x$
$4x^3 - 4x^2$	$(2x^2 - 2x)(2x)$
$2x^2 - 4x + 1$	$2x^2 \div 2x^2 = 1$
$-2x^2 + 4x - 1$	$(2x^2 - 4x + 1)(-1)$
0	

∴ Vemos que:

$$\sqrt{P(x)} = \sqrt{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1} = x^2 - 2x + 1$$

EJERCICIOS

Hallar la raíz cuadrada de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

b) $P(x) = 2x^6 - 3x^5 + 4x^3 - 6x + 1$

c) $P(x) = 2x^8 - x^7 + 6x^6 - x^4 - x^2 - 2$

d) $P(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 6x - 3$

e) $P(x) = x^{10} + 2x^5 + x^2 + 2x + 1$

RADICALES DOBLES

Las radicales dobles son expresiones algebraicas que adoptan la siguiente forma:

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}}$$

Ejemplos:

a) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{5 - \sqrt{24}}$

c) $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{14 - \sqrt{132}}$

TRANSFORMACIÓN DE RADICALES DOBLES A RADICALES SIMPLES

Las radicales dobles se pueden descomponer en la suma o diferencia de dos radicales simples.

Deducción de la fórmula.

Sabemos que:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha)$$

De aquí obtenemos el sistema cuyas incógnitas son "x" e "y"

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{A + \sqrt{B}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{A - \sqrt{B}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

i) Cálculo de "x" :

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{A+\sqrt{B}} + \sqrt{A-\sqrt{B}}}{2};$$

elevando al cuadrado

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

haciendo : $C = \sqrt{A^2 - \sqrt{B}}$

$$x = \frac{A+C}{2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

ii) Cálculo de "y"

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{A+\sqrt{B}} - \sqrt{A-\sqrt{B}}}{2};$$

elevando al cuadrado

$$y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

$$y = \frac{A-C}{2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Sustituyendo los valores de "x" e "y" en ... (1) y ... (2), obtenemos las fórmulas de transformación de radicales dobles en radicales simples; sintetizando:

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}}$$

Donde: $C = \sqrt{A^2 - B}$ y $A^2 - B$ es un cuadrado perfecto.

Ejemplo # 1:

Descomponer en radicales simples:

$$E = \sqrt{15 + 2\sqrt{56}}$$

Solución:

Pasando 2 al radical interno (pasa como 4)

$$E = \sqrt{15 + \sqrt{224}} \rightarrow \begin{cases} A = 15 \\ B = 224 \end{cases}$$

$$E = \sqrt{\frac{15+C}{2}} + \sqrt{\frac{15-C}{2}} \ \ldots\ldots\ldots\ (\alpha)$$

Calculo de C:

$$C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{15^2 - 224} = \sqrt{225 - 224} = 1$$

luego en ..... (1)

$$E = \sqrt{\frac{15+1}{2}} + \sqrt{\frac{15-1}{2}} = \sqrt{8} + \sqrt{7}$$

$$\therefore\ E = \sqrt{15 + 2\sqrt{56}} = 2\sqrt{2} + \sqrt{7} \qquad \text{Rpta.}$$

FORMA PRACTICA

Si el radical doble se puede expresar en la forma: $\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}}$; su transformación a radicales simples se obtiene por inspección:

$$\boxed{\sqrt{A \pm 2\sqrt{B}} = \sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2}}$$

en esta transformación debe tenerse en cuenta que:

1º.- $r_1 > r_2$

2º.- $r_1 + r_2 = A$

3º.- $r_1 \cdot r_2 = B$

Ejemplo # 2:

Descomponer en radicales simples:

$$R = \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$$

Solución

Buscamos dos números "r_1" y "r_2" cuya suma sea 10 y producto sea 21.

Estos números son 7 y 3, es decir $r_1 = 7$ y $r_2 = 3$, con lo cual se tendría:

$$R = \sqrt{10 - 2\sqrt{21}} = \sqrt{7} - \sqrt{3}$$

EJERCICIOS

01.- Calcular el valor de:

$$S=\sqrt{12+\sqrt{140}}-\sqrt{8+\sqrt{28}}+\sqrt{11-2\sqrt{30}}-$$
$$-\sqrt{7-2\sqrt{6}}$$

02.- Hallar el valor de:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+\ldots\ldots+2\sqrt{1+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}}$$

03.- Hallar la raíz cuadrada de:

$$S=5x+4+2\sqrt{6x^2+11x+3}$$

04. Qué radical doble dio origen a los radicales simples

$$\sqrt{5x+3}-\sqrt{3x+2}$$

Transformación en radicales simples para radicales de la forma

$$\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (I)$$
$$\sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (II)$$

Solución:
Si (I) y (II) se puede expresar en las formas:

$$\sqrt{A+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}}$$
$$\sqrt{A+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}}$$

donde: $A = x + y + z$
entonces se tendría que:

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\\ \sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}\end{array}}$$

Ejemplo # 1: Expresar en radicales simples:

$$S=\sqrt{15+\sqrt{60}+\sqrt{84}+\sqrt{140}}$$

Solución:

Como: 60 = 4 x 15
84 = 4 x 21
140 = 4 x 35

$$S=\sqrt{15+2\sqrt{15}+2\sqrt{21}+2\sqrt{35}}$$

ó también:

$$S=\sqrt{15+2\sqrt{3(5)}+2\sqrt{3(7)}+2\sqrt{5(7)}}$$

donde: 3 + 5 + 7 = 15, entonces la transformación a radicales simples es:

$$S=\sqrt{15+\sqrt{60}+\sqrt{84}+\sqrt{140}}=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

Rpta.

Descomposición en radicales simples para radicales de la forma

$$\boxed{\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}}$$

La transformación se puede expresar en las formas:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}=x+\sqrt{y}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)\\ \sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=x-\sqrt{y}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)\end{cases}$$

Para determinar "x" e "y" utilizamos las relaciones

$$C=\sqrt[3]{A^2-B}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha)$$
$$\boxed{A=4x^3-3xC}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\beta)$$
$$y=x^2-C\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\lambda)$$

C, se obtiene directamente en (α) y se reemplaza en (ß)
En (ß) se forma la ecuación cúbica en "x", la cual se resuelve por tanteos, luego el valor de "x" se reemplaza en (λ) y se obtiene el valor de "y".
Ejemplo: Hablar la raíz cúbica de:

$$10+6\sqrt{3}$$

Solución
Expresando bajo el radical cúbico, se tendría:

$$S=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=x+\sqrt{y}$$

$A = 10$ y $B = 108 \rightarrow C = \sqrt{10^2-108}$
$C = -2$

Reemplazando en:
$A = 4x^3 - 3x\,c \rightarrow 10 = 4x^3 - 3x\,(-2)$
Tenemos la ecuación:
$2x^3 + 3x - 5 = 0$: por inspección vemos que $\boxed{x = 1}$
Luego en : $y = x^2 - c$
$y = 1 - (-2)$
$y = 3$

$$\boxed{\therefore\ \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}}$$

RACIONALIZACIÓN

Es la operación que consiste en transformar una expresión algebraica irracional en otra parcialmente racional.
Fracción irracional.- Se llama así a una fracción, cuando el denominador necesariamente es irracional.
Factor racionalizante.- Es una expresión irracional que multiplicado por la parte irracional de la fracción irracional la transforma en racional.

CASOS QUE SE PRESENTAN

I. Cuando el denominador irracional es un monomio.

$$\boxed{f = \frac{N}{\sqrt[m]{a^n}}} \quad ; \quad m > n$$

En este caso el factor racionalizante multiplica al numerador y denominador y esta dado por:

$$f_r = \sqrt[m]{a^{m-n}}$$

Entonces:

$$f = \frac{N}{\sqrt[m]{a^n}} \bullet \frac{\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^{m-n}}}$$

$$f = \frac{N\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^{n+m-n}}}$$

$$f = \frac{N\sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}$$

Ejemplo: Racionalizar:

$$F = \frac{5}{\sqrt[8]{a^5\,b^3\,c^2}}$$

Solución:
El factor racionalizante es:

$$f_r = \sqrt[8]{a^3\,b^5\,c^6}$$

con lo cual:

$$F = \frac{5}{\sqrt[8]{a^5\,b^3\,c^2}} \bullet \frac{\sqrt[8]{a^5\,b^3\,c^2}}{\sqrt[8]{a^5\,b^3\,c^2}}$$

$$F = \frac{5\sqrt[8]{a^5\,b^3\,c^2}}{abc}$$

II. Cuando el denominador presenta radicales de índice dos, de las siguientes formas:

$$F_1 = \frac{N}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

$$F_2 = \frac{N}{a \pm \sqrt{b}}$$

$$F_3 = \frac{N}{\sqrt{a} + \sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$$

En este caso los factores racionalizantes respectivos son:

$$f_1 = \sqrt{a} \mp \sqrt{b}$$

$$f_2 = a \mp \sqrt{b}$$

$$f_3 = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \mp \sqrt{c}$$

Recordemos que:

$$\boxed{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}) = a - b}$$

Ejm. Racionalizar

$$R = \frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Solución:
Multiplicando por el factor racionalizante:

$$R = \left(\frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$$

obtenemos:

$$R = \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$R = \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$$

Racionalizando nuevamente:

$$R = \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} \bullet \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$R = 2+\sqrt{2}-\sqrt{6} \qquad \text{Rpta.}$$

III. Cuando el denominador irracional es un binomio o trinomio con radicales cúbicos de las siguientes formas:

$$F_1 = \frac{N}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$$

$$F_2 = \frac{N}{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$$

En este caso los factores racionalizantes son:

$$f_1 = \sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$$

$$f_2 = \sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$$

Debe tenerse en cuenta que:

$$\boxed{(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})\,(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a \pm b}$$

Ejemplo: Racionalizar:

$$f = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$$

Solución

Multiplicando por el factor racionalizante el numerador y denominador, se tendría:

$$f = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1}\right)$$

$$f = \frac{\sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1}$$

$$f = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1 \qquad \text{Rpta.}$$

IV. Cuando el denominador es un binomio o polinomio de las formas:

a) $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

b) $\sqrt[n]{a^{n-1}} \mp \sqrt[n]{a^{n-2}\,b} + \ldots\ldots\ldots \mp \sqrt[n]{b^{n-1}}$

Debemos recordar:

1) Para todo valor de n :

$$(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})\,(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}\,b} + \ldots\ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a - b$$

2) Para n impar:

$$(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})\,(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}\,b} + \ldots\ldots + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a + b$$

3) Para n par:

$$(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})\,(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}\,b} + \ldots\ldots - \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a - b$$

Uno de los factores es el factor racionalizante del otro.

Ejm.: Racionalizar $F = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2} - 1}$

Solución

Multiplicando el numerador, denominador por el factor racionalizante, obtenemos:

$$F = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2} - 1}\right)\left(\frac{\sqrt[5]{2^4} + \sqrt[5]{2^3} + \sqrt[5]{2^2} + \sqrt[5]{2} + 1}{\sqrt[5]{2^4} + \sqrt[5]{2^3} + \sqrt[5]{2^2} + \sqrt[5]{2} + 1}\right)$$

$$F = \sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2} + 1$$

FORMAS DETERMINADAS E INDETERMINADAS

Si en una fracción el numerador y denominador, o ambos se hacen cero o infinito, se obtienen las siguientes formas determinadas.

$$\frac{a}{0};\ \frac{0}{a};\ \frac{a}{\infty};\ \frac{\infty}{a};\ \frac{0}{\infty};\ \frac{\infty}{0}$$

matemáticamente se expresan de la siguiente forma:

1) $\lim\limits_{a \to \infty} \dfrac{a}{x} = 0$

2) $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{x}{a} = \infty$

3) $\lim\limits_{a \to \infty} \dfrac{x}{a} = 0$

4) $\lim\limits_{a \to \infty} \dfrac{a}{x} = \infty$

5) $\lim\limits_{\substack{a \to \infty \\ x \to 0}} \dfrac{a}{x} = 0$

6) $\lim\limits_{\substack{a \to \infty \\ x \to 0}} \dfrac{a}{x} = \infty$

Nota.- La expresión:

$\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{a}{x} = \infty$; se lee: Límite de la fracción $\dfrac{a}{x}$ cuando "x" tiende a cero es igual a infinito (∞).

Formas Indeterminadas.- Son aquellas expresiones que adoptan las formas:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty - \infty;\ 0 \times \infty;\ 1^{\infty};\ 0^{0}$$

Verdadero valor.- Es el valor que toma la forma indeterminada después de levantar la indeterminación:

FORMA INDETERMINADA: $\frac{0}{0}$

Dada la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$; tal que $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{0}{0}$. Esto nos indica que el numerados y denominador de la fracción contienen el factor (x – a) que causa la indeterminación.
Para encontrar el factor (x –a) podemos aplicar cualquiera de los siguientes criterios, según convengan:

1. **Factorización por aspa simple:**
   Si P (x) y Q(x) son expresiones racionales de segundo grado.
2. **Regla se Ruffini:**
   Si P(x) y Q(x) son expresiones racionales de grado mayor o igual que tres.
3. **Cocientes notables:**
   Si P(x) y Q(x) son expresiones racionales binomias.
4. **Racionalización**
   Si P(x) y Q(x) son expresiones irracionales.
5. **Derivación (Regla de L'Hospital)**
   Se deriva P(x) y Q(x) en forma independiente.

Ejemplo # 1.- Hallar el verdadero valor de:

$$E=\left(\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\right)\sqrt[15]{x^2}$$

cuando $x = 1$ ó $\lim\limits_{x\to 1} E$

Solución:

Cuando $x\to 1 \Rightarrow E=\frac{0}{0}$ (Ind.)

Para determinar su verdadero valor, levantamos la indeterminación.
1º.- mcm (4, 5, 15, 2, 3) = 60 (índices)

$$E=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[60]{x^{15}}-\sqrt[60]{x^{12}}}{\sqrt[60]{x^{30}}-\sqrt[60]{x^{20}}}\right)\left(\sqrt[60]{x^8}\right)$$

Haciendo el cambio de variable:
$\sqrt[60]{x}=t\to\ x=t^{60}$:
$x\to 1\ \Rightarrow t\to 1$; se tendría:

$$E=\lim_{x\to 1}\frac{(t^{15}-t^{12})\,t^8}{t^{30}-t^{20}}$$

$$E=\lim_{x\to 1}\frac{t^{20}\,(t^3-1)}{t^{20}\,(t^{10}-1)}$$

Cuando t = 1

$E=\frac{0}{0}$ (Indeterminado)

Por cocientes notables:

$$E=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t^9+t^8+t^7+........+t+1)}$$

Cuando t = 1

$$E=\frac{1^2+1+1}{1^9+1^8+1^7+.....+1+1}\ \Rightarrow\ E=\frac{3}{10}$$

$$\therefore\ \boxed{E=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x})\sqrt[15]{x^2}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{10}}$$

FORMA INDETERMINADA: $\frac{\infty}{\infty}$

Desde que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ (Ind.)

Para levantar la indeterminación factorizamos en el numerador y denominador "x" al máximo exponente; después de simplificar, calculamos el límite cuando "x" tiende al infinito.
En forma práctica debemos considerar los siguientes aspectos, respecto a los grados absolutos de P8x) y Q(x).

1º.- Si : Pº (x) > Qº (x) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\infty$
2º.- Si : Pº (x) = Qº (x) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\text{Coef}\,[\text{Max. Potencia}]}{\text{Coef}\,[\text{Max. Potencia}]}$
3º.- Si : Pº (x) < Qº (x)

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

Ejemplo.- calcular

$$E = \lim_{x \to \infty} \frac{5x^4 + 7x^3 - 5}{4x^4 + 3x^3 + x^2 - 8}$$

Solución:

Tomando el límite ($x \to \infty$)

$$E = \frac{\infty + \infty - 5}{\infty + \infty + \infty - 8} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (Ind.)}$$

Levantando la indeterminación, factorizando x con su mayor exponente.

$$E = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 \left(5 + \frac{7}{x} - \frac{5}{x^4}\right)}{x^4 \left(4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^4}\right)}$$

Cuando : $x \to \infty$

$$E = \frac{5}{4} \qquad \text{Rpta.}$$

FORMA INDETERMINADA: ∞ - ∞

Debemos considerar dos casos:

1º.- Si E(x) es una expresión algebraica irracional que toma la forma de (∞ - ∞) cuando x tiende al infinito (∞).
E(x) se multiplica y divide por su factor racionalizante y se lleva a la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
Luego de aquí podemos aplicar cualquiera de las reglas prácticas vistas anteriormente.

2º.- Si E(x) es racional y toma la forma indeterminada (∞ - ∞) cuando x→a
Para levantar la indeterminación se efectúa las operaciones indicadas y después de simplificar hallamos $\lim_{x \to a} E(x)$

Ejemplo.- calcular

$$E = \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{ax^2 - bx - x} - \sqrt{ax^2 - cx - b}\right)$$

Solución:

Cuando x → ∞ ⇒ E = ∞ - ∞ (Ind.)
Para levantar la indeterminación multiplicación el numerador y denominador que vale 1 por factor racionalizante, obtenido:

$$E = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx - c - ax^2 - cx + b}{\sqrt{ax^2 - bx - c} + \sqrt{ax^2 + cx - b}}$$

$$E = \lim_{x \to \infty} \frac{(b-c)x + (b-c)}{\sqrt{ax^2 - bx - c} + \sqrt{ax^2 + cx - b}}$$

Cuando: $x \to \infty \Rightarrow E = \frac{\infty}{\infty}$ (Ind.)

Factorizando "x" en el numerador y denominador:

$$E = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left[b - c + \frac{b-c}{x}\right]}{x\left[\sqrt{a + \frac{b}{x} - \frac{c}{x^2}} + \sqrt{a + \frac{c}{x} - \frac{b}{x^2}}\right]}$$

Cuando: $x \to \infty$

$$E = \frac{b-c}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{b-c}{2\sqrt{a}}$$

racionalizando, obtenemos el límite

$$\lim_{x \to \infty} E = \frac{(b-c)\sqrt{a}}{2a} \qquad \text{Rpta.}$$